自回归模型阶的一种强相容估计*

刘维奇　常学将

摘要在这篇文章中，我们给出一种$AR(p_0)$模型阶的估计，并且证明了这个估计的强相容性。

关键词自回归、自回归阶

一　引言

设 $x(t)$ 是由自回归模型 $AR(p_0)$生成的一个平稳遍历时间序列。$AR(p_0)$为

$$\sum_{j=0}^{p_0} a_j x(t-j)=\varepsilon(t) \tag{1.1}$$

其中 $a_0=1$，$a_{p_0}\neq 0$；

$$E\varepsilon(t)=0,\ E\varepsilon(s)\varepsilon(t)=\sigma^2\delta_{st},\ E[\varepsilon(t)]^4<\infty \tag{1.2}$$

令　$a(z)=\sum_{l=0}^{p_0} a_l z^l$，假定

$$a_0(z)\neq 0,\quad 当|z|\leqq 1. \tag{1.3}$$

Y.T. Chan等人[1]提出HOYWE(High—Order Yule—Walker Eq-uation)谱估计　HOYWE为

$$\begin{pmatrix} r_x(p_0) & r_x(p_0-1) & \cdots & r_x(1) \\ r_x(p_0+1) & r_x(p_0) & \cdots & r_x(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_x(2p_0-1) & r_x(2p_0-2) & \cdots & r_x(p_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p_0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_x(p_0+1) \\ r_x(p_0+2) \\ \vdots \\ r_x(2p_0) \end{pmatrix} \tag{1.4a}$$

简记为

$$R(p_0)\cdot A=-B(p_0) \tag{1.4b}$$

其中 $r_x(k)$ 为 $x(t)$ 的自协方差函数

$$r_x(k)=Ex(t)x(t+k)\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

林维斯[2]改进了HOYWE谱估计法并且给出 $AR(p_0)$ 阶的估计：粗略估计所研究问题的阶数 P'，令 $p>P'$，计算 $\hat{R}(p)\hat{R}(p)^{\tau}$ 的特征根并重新排列：

$$\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_p\geqslant 0,$$

再计算逼近函数

* 中国科学院科学基金资助的课题

$$\hat{S}(k)=\left[\sum_{i=1}^{k}\hat{\lambda}_i\Big/\sum_{i=1}^{p}\hat{\lambda}_i\right]^{\frac{1}{2}},\ 1\leq k\leq p. \tag{1.5}$$

p_0的估计量是使$\hat{S}(k)$接近1的最小k.其中$\hat{S}(p)$为(1.4)中用自协方差函数的估计

$$\hat{r}_x(k)=\begin{cases}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-K}x(t)x(t+) & 0\leq k\leq T-1\\ 0 & T\leq k\end{cases} \tag{1.6}$$

代替自协方差函数所得的值，其中T为样本长度。

本文修改(1.5)

$$\hat{D}(k)=1-\hat{S}(k) \tag{1.7}$$

p_0的估计为

$$\hat{P}=\inf_{k\geq 1}\left\{k:\hat{D}(k)<\left(\frac{lnT}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{1.8}$$

并证明了当$T\to\infty$时，$\hat{P}\to p_0 a.s.$

二 主要结果

先引入记号：$\Gamma(p)\triangleq R(p)\cdot R(p)^\tau$，其元素记为$\nu_{ij}(p)$，$1\leq i,\ j\leq p.$，记它们估计的量分别为：

$\hat{\Gamma}(p)\triangleq\hat{R}(p)\hat{R}(p)^\tau$和$\hat{\nu}_{ij}(p)$，$1\leq i,\ j\leq p$. 记$\Gamma(p)$和$\hat{\Gamma}(p)$的特征值分别为$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_p$和$\hat{\lambda}_1\geq\hat{\lambda}_2\geq\cdots\hat{\lambda}_p$. 另外，记(1.7)式$\hat{D}(k)$的真值为$D(k)\triangleq 1-S(k)$，其中$S(k)$为(1.5)中$\hat{S}(k)$的真值，$S(k)=\left[\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\Big/\sum_{i=1}^{p}\right]^{\frac{1}{2}}$.

为给出主要结果，给出如下引理：

引理 设$x(t)$满足(1.1)，(1.2)和(1.3).则

(1) 当$p=p_0$时，$R(p)$满秩；当$p>p_0$时，$R(p)$不满秩且$rk(R(p))=p_0$

(2) 当$p=p_0$时，$\Gamma(p)$满秩；当$p>p_0$时，$\Gamma(p)$不满秩且$rk(\Gamma(p))=p_0$

(3) 当$p\geq p_0$时，$\Gamma(p)$有且仅有p_0个正特征值，其余特征值皆为零.

〔证明〕首先证明结论(1).当$p=p_0$设，$f_k=r_x(k+1)$，$k\geq 0$. 由(1.1)f_k满足差分方程

$$y_k+a_1y_{k-1}+\cdots a_{p_0}y_{k-p_0}=0$$

且p_0为最小整数. 则根据〔3〕(Crollary to Theorem 7, P.245)

$$\begin{vmatrix} f_0f_1\cdots & \cdots f_{p_0-1}\\ f_1f_2\cdots & \cdots f_{p_0}\\ \cdots & \cdots\\ f_{p_0-1}f_{p_0}\cdots & \cdots f_{2p_0-2}\end{vmatrix}\neq 0$$

则$det(R(p_0))\neq 0$

设$p>p_0$，将$R(p)$按行分块

$$R(p)=(R_1^\tau R_2^\tau\cdots R_p^\tau)^\tau$$

由(1.1)自协方差函数$r(p)(p>0)$满足差分方程

$$\sum_{i=0}^{p_0} a_i r(p-i)=0$$

则

$$\sum_{i=0}^{p_0} a_i R_{k-i}=0 \quad k=p_0+1,\ p_0+2,\cdots p.$$

从而$R_{p_0+1},R_{p_0+2},\cdots R_p$都可由$R_1,R_2,\cdots R_p$线性表出，故$R(p)$不满秩，又由前面已证明的论断$R(p_0)$满秩，从而$R_1,R_2,\cdots R_{p_0}$线性无关，由此即知$rk(R(p))=p_0$。

注意到$rk(\Gamma(p))=rk(R(p))$，$p\geqslant 1$.即知结论(2)成立。

由$\Gamma(p)$的定义可知$\Gamma(p)\geqslant 0$，即$\Gamma(p)$非负定，从(2)可知当$p>p_0$时,$rk(\Gamma(p))=p_0$，故结论(3)成立。

根据〔4〕和〔5〕，对$P=p(T)\triangleq O[(lnT)^{1+\delta}](\delta>0)$

$$\hat{\gamma}_{ij}(p)=\gamma_{ij}(p)+O(Q(T)),\ 1\leqq i,j\leq p \tag{2.1}$$

其中$Q(T)=\left[\frac{lnlnT}{T}\right]^{\frac{1}{2}}$，事实上，

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ij}(p)&=\sum_{l=0}^{p-1}\hat{r}(l+i)\hat{r}(l+j)\\&=\sum_{l=0}^{p-1}(r(l+i)+O(Q(T)))(r(l+j)+O(Q(T)))\\&=\sum_{l=0}^{p-1}r(l+i)r(l+j)\\&+\left(\sum_{l=0}^{p-1}r(l+j)+\sum_{l=0}^{p-1}r(l+i)\right)\times O(Q(T))\\&p\cdot[O(Q(T))]^2\end{aligned}$$

由于当$K\to\infty$时$|r(k)|$以几何速度趋于零,所以第二项为$O(Q(T))$,第三项为$o(Q(T))$,而第一项为$\gamma_{ij}(p)$，故结论成立。

定理1 设$x(t)$满足(1.1)，(1.2)和(1.3)。则对给定的自然数p(即p与T无关)

$$\hat{\lambda}=\lambda_i+O(Q(T)),\quad i=1,2,\cdots p. \tag{2.2}$$

对$p=P(T)$

$$\sum_{i=1}^{p}\hat{\lambda}_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i+O(Q(T)) \tag{2.3}$$

〔证明〕为证明(2.2)引入矩阵的$Frobenius$范数$\|\cdot\|_F$，记$A=(a_{ij})$为p阶矩阵

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}|a_{il}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

根据〔6〕$\|\cdot\|_F$与向量范数$\|\cdot\|_2$是相容的，即对p维向量y

$$\|Ay\|_2\leq\|A\|_F\cdot\|y\|_2 \tag{2.5}$$

根据(2.1)和(2.4)，对给定的自然数p

$$\|\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p)\|_F=O(Q(T)) \tag{2.6}$$

由〔7〕(P.62)

$$\lambda_1=\sup_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y} \tag{2.7a}$$

$$\lambda_{i+1}=\inf_{B_{p\times i}}\sup_{B^\tau y=0}\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y}\quad i=1,2,\cdots p-1 \tag{2.7b}$$

$$\lambda_p=\inf_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y} \tag{2.7c}$$

对于$\hat{\lambda}_i\,(1\leq i\leq p)$ 有类似表达式，只需换 $\Gamma(p)$为 $\hat{\Gamma}(p)$ 。

根据(2.5)—(2.7)

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1&=\sup_y\frac{y_\tau\hat{\Gamma}(p)y}{y^\tau y}\\&=\sup_y\frac{y^\tau[\Gamma(p)+(\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p))]y}{y^\tau y}\\&\leq\sup_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y}+\sup_y\left|\frac{y_\tau(\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p))y}{y^\tau y}\right.\\&\leq\sup_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y}+\sup_y\frac{\|y^\tau\|_2\|(\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p))y\|_2}{y^\tau y}\\&\leq\sup_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y}+\sup_y\frac{\|y^\tau\|_2\cdot\|\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p)\|_F\cdot\|y\|_2}{y^\tau y}\\&=\sup_y\frac{y^\tau\Gamma(p)y}{y^\tau y}+\|\hat{\Gamma}(p)-\Gamma(p)\|_F\\&=\lambda_1+O(Q(T)).\end{aligned}$$

同理(2.2)成立。对 $p=P(T)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\hat{\lambda}_i&=tr(\hat{\Gamma}(p))\\&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=0}^{p-1}\hat{r}^2(l+i)\\&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=0}^{p-1}[r(l+i)+O(Q(T))]^2\\&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{l=0}^{p-1}r^2(l+i)+2\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{p-1}r(l+i)\right)O(Q(T))\\&\quad+p^2[O(Q(T)]^2\\&=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i+O(Q(T)).\end{aligned}$$

则(2.3)成立.

定理2　设 $x(t)$满足(1.1),(1.2)和(1.3)，给定足够大的自然数 $p(p\gg p_0)$，$\hat{P}$ 由(1.8)式确定，则当 $T\to\infty$时 $\hat{P}\to p_0\,a.s.$

〔证明〕根据引理(3)

当 $1 \le k \le p_0 - 1$, $D(k) > 0$

当 $k = p_0$, $D(k) = 0$

只需证明：$|\hat{D}(k) - D(k)| = O(Q(T))$, $k = 1, 2, \cdots p_0$ (2.8)

根据定理1((2.2)和(2.3))

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + O(Q(T)) \qquad k = 1, 2 \cdots p$$

故

$$\hat{S}(k) = \left[\sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i \Big/ \sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + O(Q(T))}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i + O(Q(T))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + O(Q(T))\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [S^2(k) + O(Q(T))]^{\frac{1}{2}}$$

从而

$$\hat{D}(K) = 1 - \hat{S}(K)$$

$$= 1 - [S^2(K) + O(Q(T))]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 - S^2(K) + O(Q(T))}{1 + (S^2(K) + O(Q(T)))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - S(K) + O(Q(T)) = D(K) + O(Q(T))$$

即(2.8)成立。

对充分大的T，有

$$\hat{D}(K) = D(K) + O(Q(T)) > \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad K = 1, 2, \cdots p_0 - 1$$

$$\hat{D}(K) = O(Q(T)) < \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad K = p_0$$

所以当 $T \to \infty$ 时，$\hat{P} \to p_0 \; a.s.$

本文使用的定阶方法没有使用 $r_x(o)$ 的估计量 $\hat{r}_x(o)$，所以具有较高的分辨力。

参 考 文 献

〔1〕 Y.T.Chan, et al, "Spectral estimation via The high—Order yule—Walker equation," IEEE, Vol. Assp—30, 689—698,(1982)

〔2〕 林维斯，"一种高分辨力的自回归谱估计"，中山大学研究生学刊，1985(1)，35—41.

〔3〕 F.R.Gantmacher, Applications of the theory of matrices, Interscience, New York,(1959)

〔4〕 An Hongzi, et al, "Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation," Ann. Statist. 10,926—936,(1982)
〔5〕 Wang Shouren,et al, Estimation of the order of ARMA model by linear proceelures. Chin.Ann.of Math. 6B(1), 53—70,(1985)
〔6〕 蒋尔雄等，线性代数，人民教育出版社，(1978).
〔7〕 Rao, C.R., Linear Statistical inference and its applications (2nd,ed.), New York: John Wiley,(1973).

A Strongly Consistent Estimation of the Order of AR(p_0) Model

Liu Weiqi　Chang Xuejiang

Abstract In this paper, We give an estimation of the order of AR(p_0) model. The strong consistency of the estimation is pvoved, too.

Key words autoregression; autoregressive order

新 书 简 介

法国数学家 Jean Francois Colombeau所著《新广义函数与分布乘积》一书于1984年由荷兰 Elsevier Science publishers B.V.作为系列丛书 North—Holland Mathematics studies 第84卷出版。该书向人们介绍了近年发展起来的一种新的数学理论——新广义函数论。这一新理论推广了经典的 Schwartz 分布理论，为量子力学中的各种非线性运算建立了严格的数学基础，提供了新工具，同时也为数学家们开辟了一个新的研究领域。该书分为三个部分：PartI，分布乘积引论。介绍物理背景，并从两个不同角度建立新理论：正则化逼近和 Fourier变换。PartⅡ，广义数学分析。把经典分析中 C^∞ 与全纯函数的某些概念和结果推广到新的广义函数上。PartⅢ，量子场论的数学框架。介绍新广义函数论在物理学中的应用；对量子场论中一些基本运算给出数学上的严格论证。新广义函数论目前还不成熟，J.F.Colombeau 的这本书是这一领域中第一本专著。

王玉川