第3卷第4期　　高 校 应 用 数 学 学 报　　№4, Vol. 3
1988年12月　　Applied Mathematics　　Dec. 1988
A Journal of Chinese Universities

# ARMA模型D-识别的强相合性

刘维奇　　常学将

（山西大学）

**摘　要**

本文使用函数$\hat{D}(n,m)$（见[1]）给出了自回归滑动平均模型阶的一种估计，即

$$\hat{q}_n=\begin{cases}\min\limits_{0\le m\le M}\left\{m:\ \dfrac{1}{|\hat{D}(n,m)|}<\left(\dfrac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, & \text{若存在}\\ \infty & \text{若不存在,}\end{cases}$$

$$\hat{p}=\min_{0\le n\le N}\{n:\ \hat{q}_n<\infty\},$$

$$\hat{q}=\hat{q}_{\hat{p}}.$$

其中$N$和$M$为预先给定的足够大的正整数。并且证明了这种估计的强相合性。

## 一　引　言

[illegible]

Gray等人[1]利用$e_n$-变换给出了谱密度的$G$-谱估计方法。Gray又和另两作者[2]使用$G$-谱估计中的$r$和$s$数组给出了$ARMA$模型阶的$D$-识别准则。本文主要是在条件(1.1)—(1.3)之下证明了$D$-识别准则的强相合性，并且给出了便于直接使用的形式。

## 二 r和s数组

设自回归滑动平均过程$x(t)$的自协方差函数和自相关函数分别是$\gamma(m)$和$\rho(m)$

$$\begin{aligned}\gamma(m)&=Ex(t)\cdot x(t+m)\\ \rho(m)&=\gamma(m)/\gamma(0)\end{aligned}\qquad m=0,\pm1,\cdots \tag{2.1}$$

引言中的假定：$x(t)\neq0$，$a.s$，保证了$\gamma(0)\neq0$。记$n$阶$Hankel$行列式

$$\begin{vmatrix}\rho(m) & \rho(m+1) & \cdots & \rho(m+n-1)\\ \rho(m+1) & \rho(m+2) & \cdots & \rho(m+n)\\ \cdots & & \cdots & \\ \rho(m+n-1) & \rho(m+n) & \cdots & \rho(m+2n-2)\end{vmatrix} \tag{2.2}$$

为$H_n^{(m)}[\rho(j)]$，$n=1, 2, \cdots$且令$H_0^{m}[\rho(j)]=1$。记$n$阶加边$Hankel$行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \rho(m) & \rho(m+1) & \cdots & \rho(m+n-1)\\ \cdots & & \cdots & \\ \rho(m+n-2) & \rho(m+n-1) & \cdots & \rho(m+2n-3)\end{vmatrix} \tag{2.3}$$

为$H_n^{(m)}[1; \rho(i+j)]$。

对$n=0, 1, 2, \cdots$和$m=0, \pm1, \pm2, \cdots$定义（参见[1]，[2]）

$$r_n(m)=\frac{H_n^{(m)}[\rho(j)]}{H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]} \tag{2.4}$$

若$H_n^{(m)}[\rho(j)]=H_n^{(m)}[1; \rho(i+j)]=0$，则定义$r_n(m)=-r_{n-1}(m+1)$，称此为负回落规则；若$H_n^{(m)}[\rho(j)]\neq0$而$H_n^{(m)}[1; \rho(i+j)]=0$，则定义$r_n(m)=\infty$；

$$s_n(m)=\frac{H_{n+1}^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]}{H_n^{(m)}[\rho(j)]} \tag{2.5}$$

若$H_{n+1}^{(m)}[1; \rho(i+j)]=H_n^{(m)}[\rho(j)]=0$，则定义$s_n(m)=-s_{n-1}(m+1)$，亦称此为负回落规则；若$H_{n+1}^{(m)}[1; \rho(i+j)]\neq0$而$H_n^{(m)}[\rho(j)]=0$，则定义$s_n(m)=\infty$。

为了方便，我们用$L(n, \triangle)$表示这样的集合。在整数集$I$上的函数$Y_h\in L(n, \triangle)$，如果存在最小正整数$n$及一组$ci$使得$Y_h$是如下差分方程的解

$$Y_k+c_1Y_{k-1}+\cdots+c_nY_{k-n}=0,\ k\in I.$$

**引理2.1** 设条件(1.1)-(1.3)成立，那么

(1) 当$m\geqslant q-p+1$或$m\leqslant -q-p-1$时

$$H_p^{(m)}[\rho(j)]\neq 0,\ H_{p+1}^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]\neq 0, \tag{2.6a}$$

并且

$$H_{p+1}^{(m)}[\rho(j)]=0 \tag{2.6b}$$

(2) 对$n>p+1$当$m\geqslant q-n+2$或$m\leqslant -g-n$时

$$H_n^{(m)}[\rho(j)]=H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]=0. \tag{2.6c}$$

**证明** 设$m\geqslant q-p+1$。根据(1.1)-(1.3)，我们知道恒成立如下等式

$$\rho(m+p)+a_1\rho(m+p-1)+\cdots+a_p\rho(m)=0$$

且$p$为最小，即当$k\geqslant q+1$时，$\rho(k)\in L(p,\ \triangle)$。

根据[3](*Corollary to Theorem 7,P.245*)

$$H_p^{(m)}[\rho(j)]\neq 0.$$

再注意到$\rho(k)\in L(p,\ \triangle)$，$k\geqslant q+1$

$$H_{p+1}^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]=(-1)^p\left(1+\sum_{j=1}^{p}a_j\right)H_p^{(m)}[\rho(j)]$$

$$\triangleq c_1H_p^{(m)}[\rho(j)]. \tag{2.7}$$

由条件(1.3)可知$c_1=(-1)^p(\sum_{j=0}^{p}a_j)\neq 0$，故当$m\geqslant q-p+1$时(2.6a)成立。

因为当$k\geqslant q+1$时，$\rho(k)\in L(p,\ \triangle)$，所以$H_{p+1}^{(m)}[\rho(j)]$中最后一列可由前$p$列线性表出，故

$$H_{p+1}^{(m)}[\rho(j)]=0.$$

同理，当$m\leqslant -q-p-1$时(2.6a)和(2.6b)成立，且有

$$H_{p+1}^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]=c_2\cdot H_p^{(m)}[\rho(j)] \tag{2.8}$$

其中$c_2=c_1/a_p\neq 0$。

设$n>p+1$且$m\geqslant q-n+2$，$H_n^{(m)}[\rho(j)]$的最后一列可以由向前$p$列线性表出，故$H_n^{(m)}[\rho(j)]=0$；而$H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]$除去第一行之后第$n-1$列及最后列各自可由向前$p$列线性表出，故$H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]=0$。

设$n>p-1$且$m\leqslant -q-n$，$H_n^{(m)}[\rho(j)]$的第$p+1$列可由前$p$列线性表出，故$H_n^{(m)}[\rho(j)]=0$；而$H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]$除去第一行之后第$p+1$列及$p+2$列各自可由向前$p$列线性表出，故$H_n^{(m)}[1,\ \rho(i+j)]=0$。

综合以上两点可知(2.6c)成立。[证毕]

为了计算$r$和$s$数组，[1](*Theorem* 7)和[4](*Theorem* 3)已经建立了如下递推公式，对于$n=1,\ 2,\ \cdots$和$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，如果式中所含各量均有限，则

$$r_{n+1}(m)=\begin{cases} r_n(m+1)\left[\dfrac{s_n(m+1)}{s_n(m)}-1\right], & 当s_n(m)\neq 0 \\ -r_n(m+1) & ,当s_n(m)=0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$s_n(m)=\begin{cases} s_{n-1}(m+1)\left[\dfrac{r_n(m+1)}{r_n(m)}-1\right], & 当r_n(m)\neq 0 \\ -s_{n-1}(m+1) & ,当r_n(m)=0 \end{cases} \tag{2.10}$$

由(2.2)-(2.5)容易得其初始值为

$$s_0(m)=1,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$r_1(m)=\rho(m),\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

因此，我们不难证明

**定理2.1** 在引理2.1条件下，给定足够大的正整数$N(N\geqslant p)$和$M(M\geqslant q)$，对于$0\leqslant n\leqslant N$和$0\leqslant m\leqslant M$，假定当$n<p$或者当$n=p$，$-q-p\leqslant m\leqslant q-p$或者当$n>p$，$-g-n+1\leqslant m\leqslant q-n+1$时

$$H_n^{(m)}[\rho(j)]\neq 0; \tag{2.11a}$$

当$n\leqslant p$或者当$n>p$，$-q-n+1\leqslant m\leqslant q-n+1$时

$$H_n^{(m)}[1;\ \rho(i+j)]\neq 0. \tag{2.11b}$$

那么以下结论成立

(1) 当$n\leqslant p$或者当$n>p$，$-q-n+1\leqslant m\leqslant q-n+1$时存在正常数$D_1$和$D_2$使得

$$0<D_1<|r_n(m)|<D_2<\infty, \tag{2.12}$$

当$n\leqslant p$或者当$n>p$，$-q-n+1\leqslant m\leqslant q-n$时存在正常数$D_3\leqslant|c_1|$，$|c_2|\leqslant D_4$使得

$$0<D_3<|s_n(m)|<D_4<\infty. \tag{2.13}$$

(2) 当$m\geqslant q-p+1$时

$$s_p(m)=c_1\ ,\ r_{p+1}(m)=0,\ s_{p+1}(m-1)=-c_1\ ; \tag{2.14}$$

当$m\leqslant -q-p$时

$$s_p(m)=c_2\ ,\ r_{p+1}(m+1)=0; \tag{2.15}$$

此外，$|s_{p+1}(-q-p-1)|=\infty$. (2.16)

## 三 定阶方法

对$m$，$n=0$，1，2，$\cdots$定义（参见[2]）

$$D(n,\ m)=\frac{\dfrac{s_{n+1}(-m-n-1)}{s_n(-m-n)}}{\nabla} \tag{3.1}$$

$$D_5 = \min\{|D(n,\ m)|\} > 0$$

$$D_6 = \max\{|D(n,\ m)|\} < \infty$$

所以(3.2)成立。

又当$n=p$且$m \geqslant q$时，$\nabla = 0$且$\frac{s_{n+1}(-m-n-1)}{s_n(-m-n)} \neq 0$，故$|D(p,\ m)| = \infty$。

最后当$n=p, m=q$时 $\nabla = 0$且$\frac{s_{p+1}(-q-p-1)}{s_p(-q-p)} = \infty$，当然$|D(p,q)| = \infty$。　[证毕]

设$X(t)$，$t=1,\ 2,\ \cdots, T$ 为样本，$T$为样本长度。记样本自协方差函数和样本自相关函数分别为

$$\hat{\gamma}(-k) = \hat{\gamma}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T-|k|} X(t)X(t+k) & k = 0, 1, \cdots T-1 \\ 0 & k \geqslant T \end{cases}$$

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

其中假定$\hat{\gamma}(0) \neq 0$，利用样本自相关函数$\hat{\rho}(k)$代替自相关函数$\rho(k)$计算 $s$ 和 $r$ 数组，分别记为$\hat{s}_n(m)$和$\hat{r}_n(m)$，由此代替$D(n,\ m)$中的$s_n(m)$和$r_n(m)$得到其估计量$\hat{D}(n,\ m)$。

**定义3.1**　给定足够大的自然数$N$和$M$，任取$0 \leqslant n \leqslant N$，令

$$\hat{q}_n = \min_{0 \leqslant m \leqslant M}\left\{m:\ \frac{1}{|\hat{D}(n,m)|} < \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{3.6a}$$

如对一切$0 \leqslant m \leqslant M$，$|\hat{D}(n,m)| \leqslant (T/\ln T)^{\frac{1}{2}}$，令$\hat{q}_n = \infty$；

$$\hat{p} = \min_{0 \leqslant n \leqslant N}\{n:\ \hat{q}_n < \infty\}; \tag{3.6b}$$

$$\hat{q} = \hat{q}_{\hat{p}}. \tag{3.6c}$$

称$(\hat{p},\ \hat{q})$为$ARMA$模型阶$(p,\ q)$的估计。

## 四　主要结果

为了给出主要结果，我们引入一个辅助引理。首先根据[5]($Theorem$ 2)有如下结论

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant P(T)} |\hat{\rho}(k) - \rho(k)| = O(Q(T)) \quad a.s. \tag{4.1}$$

其中$P(T) = O[(\ln T)^{1+\delta}], (\delta > 0)$，$Q(T) = \left(\frac{\ln\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$。

**引理4.1**　设$x(t)$满足(1.1)－(1.3)，$N$和$M$为预先指定的足够大的正整数，对 $0 \leqslant n \leqslant N$和$|m| \leqslant M+N+1$

证 … 由 … 可 … (4 … 证毕]

… 满足 … ≠ … 定的足够大的

… 及(2. … $\hat{p}\to p$, $\hat{q}\to q$ a.s.

证明 … 据引 … .1, … $j)]\neq 0$, 则

$$\ldots n)= \ldots \frac{[\ldots O(Q(T))}{\ldots]+O(Q(T))} \quad a.s.$$

$$\ldots \frac{j)]}{(i \ldots)} + O(Q(T \ldots$$

… $[\rho($ …

$\hat{s}_n(m$ …

当0 … , $0\leqslant m\leqslant$ … , $m<q$时由 … 引理3.1

$$\ldots = \frac{s_n(\ldots}{s \ldots} \ldots O(Q(T \ldots$$

$$\ldots 2) \ldots \frac{r_n \ldots}{r \ldots -n \ldots} \ldots ))$$

… 对于 … $n$, … 两项 … 似结果. …

$$\ldots \frac{m-n \ldots}{\ldots +2)}$$

$$\cdot\left(\frac{\hat{r}_{n+1}(m-n)}{\hat{r}_n(m-n+1)}\right)^{-2}+\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{\hat{r}_{n+1}(-m-n-i)}{\hat{r}_n(-m-n-i+1)}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\hat{r}_{n+1}(m-n+i)}{\hat{r}_n(m-n+i+1)}\right)^2\right]$$

$$=\nabla+O(Q(T)) \qquad a.s.$$

因为此时$\nabla\neq 0$，所以

$$\hat{D}(n,m)=\frac{\dfrac{S_{n+1}(-m-n-1)}{S_n(-m-n)}+O(Q(T))}{\nabla+O(Q(T))}$$

$$=D(n,m)+O(Q(T)) \qquad a.s.$$

根据命题3.1，$0<D_5<D(n,\ m)<D_6<\infty$，所以

$$\frac{1}{\hat{D}(n,m)}=\frac{1}{D(n,\ m)}+O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{4.3}$$

当$n=p$且$m>q$时，$\nabla=0$，从而 $\hat{\nabla}=O(Q(T)) \quad a.s.$

而
$$\frac{\hat{s}_{n+1}(-m-n-1)}{\hat{s}_n(-m-n)}=\frac{s_{n+1}(-m-n-1)}{s_n(-m-n)}+O(Q(T)) \qquad a.s.$$

且等式右端第一项非零且有限，故

$$\frac{1}{\hat{D}(n,m)}=\frac{\hat{\nabla}}{\dfrac{\hat{s}_{n+1}(-m-n-1)}{\hat{s}_n(-m-n)}}=\frac{O(Q(T))}{\dfrac{s_{n+1}(-m-n-1)}{s_n(-m-n)}+O(Q(T))}$$

$$=O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{4.4}$$

当$n=p,m=q$时，$\nabla=0$，类似地 $\nabla=\hat{O}(Q(T)) \ a.s.$ 而$H_{p+1}^{(-q-p-1)}[\rho(j)]=0$，$H_{p+2}^{(-q-p-1)}[1;\ \rho(i+j)]\neq 0$，故

$$\frac{1}{\hat{s}_{p+1}(-q-p-1)}=\frac{\hat{H}_{p+1}^{(-q-p-1)}[\rho(j)]}{\hat{H}_{p+2}^{(-q-p-1)}[1;\ \rho(i+j)]}+O(Q(T)) \qquad a.s.$$

又$s_p(-q-p)\neq 0$且有限，所以

$$\frac{\hat{s}_p(-q-p)}{\hat{s}_{p+1}(-q-p-1)}=\frac{s_p(-q-p)+O(Q(T))}{\hat{S}_{p+1}(-q-p-1)} \qquad a.s.$$

$$=[s_p(-q-p)+O(Q(T))]\cdot O(Q(T)) \qquad a.s.$$

$$=O(Q(T)) \qquad a.s.$$

因此

$$\frac{1}{\hat{D}(p,q)}=\frac{\hat{\nabla}}{\dfrac{\hat{S}_{p+1}(-q-p-1)}{\hat{S}_p(-q-p)}}=\hat{\nabla}\cdot\frac{\hat{S}_p(-q-p)}{\hat{S}_{p+1}(-q-p-1)}$$

$$=[O(Q(T))]^2 \qquad a.s. \tag{4.5}$$

联合(4.3)-(4.5)我们得到：当$0\leqslant n<p$，$0\leqslant m\leqslant M$或当$n=p$，$m>q$时，

$$\frac{1}{\hat{D}(n,m)}=\frac{1}{D(n,m)}+O(Q(T))\qquad a.s.$$

当$n=p$，$q<m\leqslant M$时，

$$\frac{1}{\hat{D}(n,m)}=O(Q(T))\qquad a.s.$$

此外

$$\frac{1}{\hat{D}(p,q)}=[O(Q(T))]^2\qquad a.s.$$

所以当$T\to\infty$时，对$0\leqslant n\leqslant p-1$，$1\leqslant m\leqslant M$或对$n=p$，$0\leqslant m\leqslant q-1$

$$\frac{1}{|\hat{D}(n,m)|}\overset{a.s.}{=}\frac{1}{|D(n,m)|}+O(Q(T))>\left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}},$$

此外

$$\frac{1}{|\hat{D}(p,q)|}\overset{a.s.}{=}[O(Q(T))]^2<\left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以，当$T\to\infty$时，$(\hat{p},\ \hat{q})\to(p,\ q)$　a.s.

〔证毕〕

本文中的定阶方法其原始形式是由Gray等人给出的．最初的定阶方法是通过直观观察$s$和$r$数组的变化规律而确定模型的阶（见[1]，[2]和[6]），然后这些作者又定义了函数$D(n,\ m)$，通过求$\hat{D}(n,\ m)$的极大值而定阶．本文的定义与原始形式本质上是一致的．在这篇文章中$s$和$r$数组的定义使用了自相关函数$\rho(m)$，其实用$(-1)^m\rho(m)$代替$\rho(m)$有同样的结果．[1]，[2]和[6]中都给出了大量模似例子，结果表明这种定阶方法比较简便，而且精确度较高．

## 参考文献


[1] Gray, H.L., Houston, A.G. and Morgan, F.W., On G-spectral estimation. Applied Time Series Analysis, Academic Press, Inc., 1978, 39-138.

[2] Gray, H.L., Kelley, G.D. and McIntire, D.D., A new approach to ARMA modeling. Commun. Statist., B7, 1(1978), 1-77.

[3] Gantmacher, F.R., Applications of the Theory of Matrices. Interscience, New York, 1959.

[4] Pye, W.C. and Atchison, T.A., An algorithm for the computation of the higher order G-transformation, Siam J. Numer. Anal., 10, 1(1973), 1-7,

[5] An Hong-zhi, Chen Zhao-guo and Hannan, E.J., Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation, The Ann. of Statist., 10, 3(1982), 926-936.

[6] 常学将，G-谱估计方法，应用概率统计（待发表）。

# THE STRONG GONSISTENGY OF THE D-IDENTIFICATION OF ARMA MODEL

Liu Weiqi Chang Xuejiang
(Shanxi University)

**Abstract**

In this paper, we give an estimation of order of ARMA model by the function $\hat{D}(n, m)$ (see[1])

$$\text{Let:}\quad \hat{q}_n = \begin{cases} \min\limits_{0 \leq m \leq M} \left\{ m: \dfrac{1}{\hat{D}(n, m,)} < \left( \dfrac{\ln T}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, & \text{if it exists,} \\ \infty, & \text{o.w.,} \end{cases}$$

$$\hat{p} = \min_{0 \leq n \leq N} \{ n: \hat{q}_n < \infty \},$$

$$\hat{q} = \hat{q}_{\hat{p}},$$

Where N and M are previously given large enough positive integers. And the strong consistency of the estimate is proved.