1989年 第10卷 第4期　　太原机械学院学报　　Vol.10 No.4 1989
（总第28期）JOURNAL OF TAIYUAN INSTITUTE OF MACHINERY (Sum No.28)

ARMA模型MA参数的一种估计

潘晋孝　　刘维奇

摘要　本文利用逆自相关函数的G—谱估计给出ARMA模型MA参数的一种估计，并且证明这种估计具有强相合性与渐近正态性。

关键词　协方差函数；相关函数；参数

0　引言

自回归滑动平均模型（ARMA模型）在时间序列分析和控制论中占有比较重要的地位，它在工业自动化、水文、地质和气象等自然科学领域，以及军事科学、经济学和某些社会科学领域都得到了广泛的应用。因此，ARMA模型的识别与参数估计的研究是一个重要课题。系于ARMA模型AR参数估计已有许多很好的估计方法，如高阶Yule-Walker估计；但对于MA参数估计方法却为数很少，已有的方法效果也较差。我们利用逆自相关函数G-谱估计[1]给出MA参数的一种估计方法。

设$x(t)$，$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$是一个平稳遍历时间序列，满足

$$\sum_{j=0}^{p} a_j x(t-j)=\sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon(t-j) \tag{1}$$

其中$a_0=b_0=1$，$a_p\cdot p_q\neq0$，$p\geqslant0$，$q\geqslant0$且

$$E\varepsilon(t)=0,\quad E\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(s)=\sigma^2\cdot\delta_{s,t},\quad E\varepsilon(t)^4<\infty \tag{2}$$

记$A(z)=\sum_{j=0}^{p}a_j z^j$，$B(z)=\sum_{j=0}^{q}b_j z^j$，假定$A(z)$和$B(z)$互质且当$|z|\leqslant1$时

$$A(z)\cdot B(z)\neq0 \tag{3}$$

假定观察值X_t，$t=1,2,\cdots,T$，T为样本长度。设自协方差函数及样本自协方差函数分别为

$$r(k)=Ex(t)x(t+k)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{4a}$$

$$\hat{r}(-k)=\hat{r}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T-k}X_t\cdot X_{t+k} & 0\leqslant k\leqslant T-1\\ 0 & k\geqslant T\end{cases} \tag{4b}$$

则相应的自相关函数及样本自相关函数分别为

本稿于1989年5月25日收到。

$$\rho(k)=r(k)/\gamma(0),\quad \hat{\rho}(k)=\hat{r}(k)/\hat{r}(0)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{5}$$

设逆自协方差函数和逆自相关函数函数分别为

$$r_i(k)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}\frac{1}{4\pi^2 f(\lambda)}d\lambda\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6}$$

$$\rho_i(k)=r_i(k)/r_i(0)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{7}$$

其中

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|B(e^{-i\lambda})|^2}{|A(e^{-i\lambda})|^2}\qquad |\lambda|\leqslant 2\pi$$

是 $x(t)$的谱密度。

定义逆自相关函数的 G－谱估计[1,2]

$$\hat{r}_i(k)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}\frac{d\lambda}{4\pi^2\hat{f}_G(\lambda)}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8}$$

$$\hat{\rho}_i(k)=\hat{r}_i(k)/\hat{r}_i(0)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{9}$$

而G－谱估计[3]

$$\hat{f}_G(\lambda)=\frac{1}{\pi}R_e\left[e_p(\hat{F}_m)-\hat{F}_0\right]+\frac{1}{2\pi}\hat{r}(0)\qquad m\geqslant q \tag{10}$$

其中 $e_p(\cdot)$为 e_p－变换，$\hat{F}_m$ 为 F_m 的估计量，且

$$F=\sum_{j=-n}^{m}r(j)e^{-ij\lambda}\qquad n>\max\{0,p-q-2\}$$

$$\hat{F}_m=\sum_{j=-n}^{m}\hat{r}(j)e^{-ij\lambda}\qquad n>\max\{0,p-q-2\}$$

我们将在下一段给出 MA 参数的估计，并在最后一段证明估计一些性质.

1　MA参数的估计

假定 $x(t)$满足式(1)～(3)，那么其逆自协方差函数（或逆自相关函数）可以看作 ARMA（q，p）序列

$$\sum_{j=0}^{q}b_j x'(t-j)=\sum_{j=0}^{p}a_j e'(t-j)$$

的自协方差函数（或自相关函数）[4]，从而

$$\sum_{j=0}^{q}b_j r_i(k-j)=0\qquad k>p \tag{11}$$

取 $k=p+1$，$p+2$，…，$p+q$ 得到Cleveland-Parzen 方程

$$\begin{pmatrix} r_i(p) & r_i(p-1) & \cdots & r_i(p-q+1) \\ r_i(p+1) & r_i(p) & \cdots & r_i(p-q+2) \\ \cdots & & \cdots & \\ r_i(p+q-1) & r_i(p+q-2) & \cdots & r_i(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_i(p+1) \\ r_i(p+2) \\ \vdots \\ r_i(p+q) \end{pmatrix} \quad (12a)$$

简记为

$$R_{iq} \cdot b = -r_{iq} \quad (12b)$$

容易证明非对称 Toeplitz 矩阵 R_{iq} 是非奇异的[5]，所以（12）存在唯一解．将(16)中的逆自协方差函数用其 G －谱估计代替即得 MA 参数的估计方程

$$\hat{R}_{iq} \cdot \hat{b} = -\hat{r}_{iq} \quad (13)$$

定义 2.1　称由(13)决定的 $\hat{b} \triangleq (\hat{b}_1 \cdots \hat{b}_q)^{\tau}$ 是滑动平均参数 $b=(b_1 \cdots b_q)^{\tau}$ 的估计．

为了说明这种定义的合理性，只要证明 $\hat{R}_{iq}$ 是几乎处处可逆的．根据〔1〕（定理 4 ）我们容易得到如下引理

引理2.1　设 $x(t)$ 满足（1）～（3），则当 $T\to\infty$ 时，$\hat{R}_{iq} \to R_{iq}$　$a.s.$　且

$$\hat{R}_{iq} - R_{iq} = O(Q(T)) \qquad a.s. \quad (14)$$

其中

$$Q(T) = (\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}$$

由于 R_{q} 是非奇异的，根据引理 2.1 可知当 T 适当大时，$\hat{R}_{iq}$ 是几乎处处可逆的．

在（12）式中用逆自相关函数代替逆自协方差函数，其解不变．因此我们在（13）式中用逆自相关函数的 G－谱估计代替逆自协方差函数的 G－谱估计，其解不变

2　MA参数估计的渐近性质

在这一段中，我们将证明由（13）式确定的 MA 参数估计是强相合的，且是具有渐近正态性．

根据〔1〕（定理 4 ），使用〔5〕（定理 3.1）和〔6〕（定理 2，P.330）的证明方法可以得到如下结论

定理 3.1　设 $x(t)$ 是满足（ 1 ）～（ 3 ）的 ARMA 序列，那么由（13）式确定的 MA 参数 b 的估计 $\hat{b}$ 是强相合的，且当 $T\to\infty$ 时

$$\hat{b} - b = O\ (Q(T)) \qquad a.s.$$

为了证明估计的渐近正态性，我们引入如下记号〔2〕

$$V_{\lambda} = (1\ \cos\lambda\ \cos 2\lambda\ \cdots\ \cos\ (p+q)\lambda)^{\tau} \quad (15)$$

$$W_{\lambda} = (w_1\ w_2 \cdots\ w_{m+n+2}\ \theta_1\ \theta_2\ \cdots\ \theta_p)^{\tau} \quad (16)$$

其中 m，n 为满足 $m \geqslant q$，$n > \max\{0, p-q-2\}$ 的任意自然数，当然应尽可能小．

$$\theta_j = \frac{1}{\pi} R_c \left(\frac{F_{m-j+1}}{1 + a_1 e^{-i\lambda} + \cdots + a_p e^{-ip\lambda}} - \frac{F_{m+1} + a_1 e^{-i\lambda} F_m + \cdots + a_p e^{-ip\lambda} F_{m-p+1}}{(1 + a_1 e^{-i\lambda} + \cdots + a_p e^{-ip\lambda})^2} \right) e^{-ij\lambda}$$

$$1 \geqslant j \geqslant p$$

当 $m-p+1>0$ 时

$$w_{j+n+1}=\begin{cases}0 & -n\leqslant j\leqslant -1\\ \dfrac{1}{2\pi} & j=0\\ \dfrac{1}{\pi}\cos j\lambda & 1\leqslant j\leqslant m-p+1\\ \dfrac{1}{\pi}R_e\left[\dfrac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-j}e^{-i(m+1-j)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}e^{-ij\lambda}\right] & m-p+1<j\leqslant m+1\end{cases}$$

当 $m-p+1\leqslant 0$ 时

$$w_{j+n+1}=\begin{cases}0 & -n\leqslant j\leqslant m-p+1\text{且}j\neq 0\\ \dfrac{1}{\pi}Re\left[\dfrac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-j}e^{-i(m+1-j)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}-1\right]e^{-ij\lambda} & m-p+1<j<0\\ \dfrac{1}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}Re\left[\dfrac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1}e^{-i(m+1)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}-1\right] & j=0\\ \dfrac{1}{\pi}Re\left[\dfrac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-j}e^{-i(m+1-j)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}e^{-ij\lambda}\right] & 1\leqslant j\leqslant m+1\end{cases}$$

$$H_1=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}V_\lambda\cdot W_\lambda^*\frac{d\lambda}{f^2(\lambda)} \tag{17}$$

$$H_2=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c:c:c}0 & I^* & \overbrace{\quad 0\quad}^{c-n-1}\\ \hdashline I_{m+2} & \multicolumn{2}{c}{0}\\ \hdashline \underbrace{R_p^{-1}D}_{p+q+1} & & \underbrace{\quad 0\quad}_{c-p-q-1}\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\}\,n\\ \}\,m+2\\ (m+n+p+2)\times c\end{array} \tag{18}$$

其中 $c=\max\{p+q,\ n,\ m\}+1$，I_{m+2} 为 $m+2$ 阶单位阵，I^* 为 n 阶反对角矩阵，其反对角元为1，D 为 $p\times(p+q+1)$阶矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{7}{c}{D_1}\\ \hdashline a_p & a_{p-1}\cdots a_1 & 1 & 0\cdots & 0 & 0 & \\ 0 & a_p & \cdots a_2 & a_1 & 1\cdots & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & a_p & \cdots & & a_1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\}\ j=1,2,\cdots p-q-1\\ \\ \\ j=p-q,\ \cdots,\ p\end{array}$$

当 $q\geqslant[p/2]$时，D_1 的第 $j(1\leqslant j\leqslant p-q-1)$行为

$$a_{q+j}\quad a_{q+j-1}+a_{q+j+1}\cdots a_{q+j-(p-q-j)}+a_p\quad a_{q+j-(p-q-j+1)}\cdots a_1\quad \underbrace{1\ 0\cdots 0}_{p-j} \tag{19a}$$

当 $q<[p/2]$时，D_1 的第 $j(1\leqslant j\leqslant[p/2]-q)$行为

$$a_{q+j}\quad a_{q+j-1}+a_{q+j+1}\cdots a_1+a_{q+j+(q+j-1)}\quad a_{q+j+(q+j)}+1\quad a_{q+j+(q+j+1)}\cdots a_p\underbrace{0\cdots 0}_{2q+j} \tag{19b}$$

且 D_1 的第 $j([p/2]-q<j\leqslant p-q-1)$行同（19a）

$$\Sigma_0=H_1\cdot H_2\cdot G\cdot H_2^{\tau}\cdot H_1^{\tau} \tag{20}$$

其中 G 的第 i 行第 i 列元素

$$g_{ij}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(r(i+k)\cdot r(j+k)+r(i-k)\cdot r(j+k))\qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant c)$$

为了给出估计的渐近性，首先引入一个引理

引理3.1　对任何 ARMA（p，q）过程，如果其逆自相关函数存在，则总存在一个 $q\times(q+p+1)$ 矩阵 D_i 使成立如下等式

$$D_i(\hat{r}_i-r_i)=\hat{r}_{iq}+\hat{R}_q\cdot b \tag{21}$$

其中 $r_i=(r_i(0)\ \ r_i(1)\ \cdots\ r_i(p+q+1))^{\tau}$，$\hat{r}_i=(\hat{r}_i(0)\ \ \hat{r}_i(1)\ \cdots\ \hat{r}_i(p+q+1))^{\tau}$，$D$ 与(19)中 D 类似，只需将 D 中的 p，q 互换，将$(a_1\ a_2\cdots a_p)^{\tau}$ 换为$(b_1 b_2\cdots b_q)^{\tau}$．

其证明与〔7〕（Lemma 2）类似，故不重述．

定理3.2　设 $x(t)$满足式(1)～(3)，假定线性新息 $\varepsilon(t)$是独立同分布随机变量，$x(t)$又是正态过程，则当 $T\to\infty$ 时，向量$\sqrt{T}(\hat{b}-b)$的联合分布渐近于正态 $N(0,\Sigma)$，其中

$$\Sigma=R_{iq}^{-1}\cdot D\cdot\Sigma_0 D_i^{\tau}\cdot R_{iq}^{\tau}$$

证明　根据〔1〕（定理 4）可知当 T 充分大时，$\hat{R}_{iq}^{-1}$概率 1 存在，因此

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{b}-b)&=-\sqrt{T}\hat{R}_{iq}^{-1}(\hat{r}_{iq}+\hat{R}_{iq}\cdot b)\\&=-\hat{R}_i^{-1}\cdot D\cdot\sqrt{T}(\hat{r}_i-r_i)\end{aligned} \tag{22}$$

根据引理2.1，当 $T\to\infty$时

$$\hat{R}_{iq}^{-1}\xrightarrow{a.s.}R_{iq}^{-1} \tag{23}$$

又由〔2〕（定理2.1）

$$\sqrt{T}(\hat{r}_i - r_i) \xrightarrow[T\to\infty]{D} N(o, \Sigma_0) \tag{24}$$

联合(22)～(24)我们有

$$\sqrt{T}(\hat{b} - b) \xrightarrow[T\to\infty]{D} N(0, \Sigma)$$

定理证毕

参考文献

1 常学将，王明生．逆自相关函数的 G-谱估计．科学通报．1986；31：635

2 刘维奇，常学将．逆自相关函数 G-谱估计的渐近正态性．山西大学学报．1989

3 Morton M J, Gray H L. The G-spectral estimator. JASA, 1984; 79: 692～701

4 Priestley M B. Spectral Analysis and Time Series. Academic Press, London, 1981

5 常学将，刘维奇．AR 模型识别及其参数的高阶yule-walker 估计．应用数学学报．1989；12：225～235

6 安鸿志，陈兆国，杜金观，潘一民．时间序列的分析与应用．科学出版社，北京，1983

7 Gingras D F. Asymptotic properties f high-order yule-walker estimates of AR paramete s f an ARMA time series. IEEE, 1988; Assp-33: 1095～1101

AN ESTIMATE OF THE MA PARAMETERS OF THE ARMA MODEL

Pan Jinxiao Liu Weiqi

Abstract

In this paper, we give an estimate of the MA parameters of the ARMA model using the G-spectral estimator of the inverse auto-correlation function. The strong consistency and asymptotic normality of the estimate are proved.

Key words covariance function; correlation function; parameter