第 12 卷 第 2 期 应用数学学报 Vol. 12, No. 2
1989 年 4 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Apr., 1989

AR 模型识别及其参数的高阶 Yule-Walker 估计

常学将 刘维奇
(山西大学)

AR MODEL IDENTIFICATION AND THE HIGH ORDER YULE-WALKER ESTIMATION OF AUTOREGRESSIVE PARAMETERS

Chang Xue-jiang Liu Wei-qi
(*Shanxi University*)

Abstract

The order of an autoregressive sequence $x(t)$ is estimated by calculating the eigenvalues of a matrix with relation to the high order sample covariance matrix, and the strong consistency of the estimate is proved. Assume that the order is known. Then the strong consistency of the high order Yule-Walker estimation of autoregressive parameters is proven and the asymptotic normality of the estimates is studied

一、引 言

自回归谱估计在许多领域获得了广泛的应用,随着科学技术的不断发展,对谱估计分辨力的要求越来越高. 高阶 Yule-Walker 谱估计就是具有较高分辨力的一种估计(见[1]). 为了进一步研究这种估计首先必须研究自回归模型阶的识别及其参数的高阶 Yule-Walker 估计. 通常使用的自回归定阶方法与参数的矩估计方法使用了样本自协方差函数(或样本自相关函数)在零点的值 $\hat{r}(0)$(或 $\hat{\rho}(0)$). 而 $\hat{r}(0)$(或 $\hat{\rho}(0)$)就是影响自回归谱估计分辨力的一个重要因素. 实际上,通常的信号观测值包含两部分

$$x(t) = s(t) + \eta(t),\ t = 1, 2, \cdots, T, \tag{1.1}$$

其中 $s(t)$ 为自回归信号值, $\eta(t)$ 是白噪声,方差为 σ_η^2 且 $\{s(\cdot)\}$ 与 $\{\eta(\cdot)\}$ 独立. 而观测值的自协方差函数为

$$r_x(k) = Ex(t)x(t+k) = r_s(k) + \sigma_\eta^2 \cdot \delta_{k,0},\ k = 0, \pm 1, \cdots, \tag{1.2}$$

本文 1987 年 3 月 3 日收到, 1988 年 5 月 3 日收到修改稿.

其中 $r_s(k)$ 为 $s(t)$ 的自协方差函数，$\delta_{k,0}$ 当 $k=0$ 时为 1，否则为 0。由此可见由于噪声的干扰，使得观测值与信号的自协方差函数从而自相关函数在零点不同，而在其它点则一致。这就说明由观测值得到的样本自协方差函数(或样本自相关函数)在零点的值不能趋向于真实值。因此，在自回归谱估计中，如果使用了样本自协方差函数（或样本自相关函数)在零点的值必然影响谱估计的分辨力。

另外注意到(1.1)式与自回归信号加噪声模型(见[2])形式类似，因此本文所涉及的自回归定阶方法及参数的高阶 Yule-Walker 估计对于研究自回归信号加噪声模型也有重要意义。

设 $x(t)$ 是由如下自回归模型 $AR(p_0)$ 生成的一个平稳遍历时间序列

$$\sum_{j=0}^{p_0} a_j x(t-j)=\varepsilon(t), \tag{1.3}$$

其中 $a_0=1$，$a_{p_0}\neq 0$；$\{\varepsilon(t)\}$ 独立同分布且 $\varepsilon(t)$ 与 $x(s)(s<t)$ 独立，

$$E\varepsilon(t)=0,\ E\varepsilon(t)\varepsilon(s)=\sigma^2\cdot\delta_{t,s},\ E(\varepsilon(t))^4<\infty. \tag{1.4}$$

令 $A(z)=\sum_{j=0}^{p_0} a_j z^j$，假定

$$A(z)\neq 0,\ 当\ |z|\leqslant 1. \tag{1.5}$$

给定观测值 $x(1), x(2), \cdots, x(T)$，T 为样本长度，设高阶协方差阵

$$R_p=\begin{bmatrix} r(p) & r(p-1)\cdots r(1)\\ r(p+1) & r(p)\ \ \cdots r(2)\\ \cdots & \cdots\\ r(2p-1) & r(2p-2)\cdots r(p)\end{bmatrix}$$

将 R_p 中自协方差函数 $r(k)$ 用样本自协方差函数

$$\hat r(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k} x(t)x(t+k), & 0\leqslant k\leqslant T-1,\\ 0, & k\geqslant T,\end{cases}$$

$$\hat r(-k)=\hat r(k),\ k=0,1,2,\cdots$$

代替得到 R_p 的估计 $\hat R_p$。林维斯[3] 给出自回归模型阶的一种估计方法，我们修改这个方法为：预先选定足够大的自然数 p，计算矩阵 $\hat\Gamma_p=\hat R_p^{\tau}\cdot\hat R_p$ 的特征根 $\hat\lambda_1\geqslant\hat\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\hat\lambda_p\geqslant 0$，然后计算逼近函数

$$\hat D(k)=1-\left[\frac{\hat\lambda_1+\hat\lambda_2+\cdots+\hat\lambda_k}{\hat\lambda_1+\hat\lambda_2+\cdots+\hat\lambda_p}\right]^{\frac{1}{2}},\ 1\leqslant k\leqslant p, \tag{1.6}$$

从而可得到 p_0 的估计为：

$$\hat p_0=\inf_{k\geqslant 1}\left\{k:\hat D(k)<\left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{1.7}$$

并且证明了当 $T\to\infty$ 时，$\hat p_0\to p_0$，a.s.

然后假定自回归模型 p_0 已知，根据高阶 Yule-Walker 方程

$$\begin{bmatrix} r(p_0) & r(p_0-1) & \cdots & r(1)\\ r(p_0+1) & r(p_0) & \cdots & r(2)\\ \cdots & & \cdots & \\ r(2p_0-1) & r(2p_0-2) & \cdots & r(p_0)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{p_0}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} r(p_0+1)\\ r(p_0+2)\\ \vdots\\ r(2p_0)\end{bmatrix} \tag{1.8a}$$

简记为：

$$R_{p_0}\cdot a=-r_{p_0}. \tag{1.8b}$$

得到参数 a 的高阶 Yule-Walker 估计 $\hat{a}=(\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_{p_0})^\tau$，它由方程

$$\hat{R}_{p_0}\cdot\hat{a}=-\hat{r}_{p_0} \tag{1.9}$$

来确定，其中 $\hat{r}_{p_0}=(\hat{r}(p_0+1)\hat{r}(p_0+2)\cdots\hat{r}(2p_0))^\tau$. 我们证明了这个估计的强相容性,给出了收敛速度为 $O\left(\left(\frac{\ln\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right)(T\to\infty)$,并且讨论了其渐近性质. 从而给出了具有渐近性质的强相容自回归谱估计. 最后一节我们做了模拟研究,其结果表明高阶 Yule-Walker 参数估计比通常的矩估计精度要高得多.

二、阶 的 估 计

在讨论定阶方法之前,首先给出如下引理

引理 2.1 设 $x(t)$ 满足(1.3)—(1.5),则当 $p=p_0$ 时 R_p 满秩;当 $p>p_0$ 时,R_p 不满秩而 $rk(R_p)=p_0$.

证 根据假设可知自协方差函数 $r(k)(k\geqslant 1)$ 满足 p_0 阶差分方程

$$\sum_{j=0}^{p_0}a_jY_{k-j}=0 \tag{2.1}$$

且 p_0 为最低阶数(见[4]).

设 $p=p_0$，令 $f_k=r(k+1)(k\geqslant 0)$，则由(2.1) f_k 满足上述差分方程且 p_0 为最小整数,则根据文献[5]定理 7 的推论

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{p_0-1}\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_{p_0}\\ \cdots & & \cdots & \\ f_{p_0-1} & f_{p_0} & \cdots & f_{2p_0-2}\end{vmatrix}\neq 0$$

则 $\det(R_{p_0})\neq 0$，故 R_{p_0} 不满秩.

设 $p>p_0$，将 R_p 按行分块.

$$R_p=\begin{bmatrix}R(1)\\R(2)\\ \vdots\\ R(p)\end{bmatrix}.$$

再由(2.1)式知

$$\sum_{j=0}^{p_0}a_jR(l-j)=0,\ l=p_0+1,\cdots,p.$$

从而 $R(p_0+1),\cdots,R(p)$ 都可由 $R(1),R(2),\cdots,R(p_0)$ 线性表出，故 R_p 不满秩. 又由前面的讨论知 R_{p_0} 满秩，从而 $R(1),R(2),\cdots,R(p_0)$ 线性无关，因此 $rk(R_p)=p_0$.

注意到 $\Gamma_p=R_p^\tau\cdot R_p$ 不难得出如下推论

推论 在引理 2.1 条件下，当 $p\geqslant p_0$ 时 $rk(\Gamma_p)=p_0$，且 Γ_p 仅有 p_0 个正特征根

其余均为零.

根据[6]和[7],对 $p=P(T)\triangleq O((\ln T)^{1+\delta})(\delta>0)$

$$\hat{v}_{ij}(p)=v_{ij}(p)+O(Q(T)),\ \text{a.s.},\ 1\leqslant i,j\leqslant p, \tag{2.2}$$

其中 $v_{ij}(p)$ 和 $\hat{v}_{ij}(p)$ 分别为 Γ_p 和 $\hat{\Gamma}_p$ 的第 i 行第 j 列元素,且 $Q(T)=\left(\frac{\ln\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$.

事实上

$$\begin{aligned}\hat{v}_{ij}(p)&=\sum_{l=0}^{p-1}\hat{r}(l+i)\hat{r}(l+j)\\&=\sum_{l=0}^{p-1}(r(l+i)+O(Q(T)))(r(l+j)+O(Q(T)))\\&=\sum_{l=0}^{p-1}r(l+i)r(l+j)\\&\quad+\left(\sum_{l=0}^{p-1}(r(l+j)+r(l+i))\right)\cdot O(Q(T))+p\cdot[O(Q(T))]^2\ \text{a.s.}\end{aligned}$$

由于当 $k\to\infty$ 时,$|r(k)|$ 以几何速度趋于零,所以第二项为 $O(Q(T))$,第三项当然为 $O(Q(T))$,而第一项显然为 $v_{ij}(p)$,故(2.2)式成立.

定理 2.1　设 $x(t)$ 满足(1.3)—(1.5),则对给定的自然数 p(即 p 与 T 无关)

$$\hat{\lambda}_i=\lambda_i+O(Q(T)),\ \text{a.s.},\ i=1,2,\cdots,p \tag{2.3}$$

对 $p=P(T)$

$$\sum_{i=1}^{p}\hat{\lambda}_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i+O(Q(T))\quad \text{a.s.} \tag{2.4}$$

证　为证(2.3)引入矩阵的 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_F$,记 $A=(a_{ij})$ 为 p 阶矩阵

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

熟知 $\|\cdot\|_F$ 与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 是相容的,即对 p 维向量 Y

$$\|AY\|_2\leqslant\|A\|_F\cdot\|Y\|_2 \tag{2.6}$$

根据(2.2)和(2.5)对给定的自然数 p

$$\|\hat{\Gamma}_p-\Gamma_p\|=O(Q(T))\quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

由[8](62 页)

$$\lambda_1=\sup_{Y}\frac{Y^\tau\Gamma_pY}{Y^\tau Y}, \tag{2.8a}$$

$$\lambda_{i+1}=\inf_{B_{p\times i}}\sup_{B^\tau Y=0}\frac{Y^\tau\Gamma_pY}{Y^\tau Y},\quad i=1,2,\cdots,p-1, \tag{2.8b}$$

$$\lambda_p=\inf_{Y}\frac{Y^\tau\Gamma_pY}{Y^\tau Y}, \tag{2.8c}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为 Γ_p 的特征根且 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$. 对于 $\hat{\lambda}_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 有类似表达式,只需换 Γ_p 为 $\hat{\Gamma}_p$.

根据(2.6)—(2.8)

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= \sup_Y \frac{Y^\tau[\Gamma_p + (\hat{\Gamma}_p - \Gamma_p)]Y}{Y^\tau Y} \\
&\leqslant \sup_Y \frac{Y^\tau \Gamma_p Y}{Y^\tau Y} + \sup_Y \left| \frac{Y^\tau(\hat{\Gamma}_p - \Gamma_p)Y}{Y^\tau Y} \right| \\
&\leqslant \sup_Y \frac{Y^\tau \Gamma_p Y}{Y^\tau Y} + \sup_Y \frac{\|Y^\tau\|_2 \cdot \|\hat{\Gamma}_p - \Gamma_p\|_F \cdot \|Y\|_2}{Y^\tau Y} \\
&= \lambda_1 + \|\hat{\Gamma}_p - \Gamma_p\|_F \\
&= \lambda_1 + O(Q(T)) \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

类似地还可导出

$$
\hat{\lambda}_1 \geqslant \sup_Y \frac{Y^\tau \Gamma_p Y}{Y^\tau Y} - \|\hat{\Gamma}_p - \Gamma_p\|_F = \lambda_1 + O(Q(T)), \quad \text{a.s.}
$$

从而有

$$
\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + O(Q(T)) \quad \text{a.s.}
$$

同理(2.3)式成立。对 $p = P(T)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i &= \operatorname{tr}(\hat{\Gamma}_p) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=0}^{p-1} \hat{r}^2(l+i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=0}^{p-1} r^2(l+i) + 2\sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{l=0}^{p-1} r(l+i) \right) \cdot O(Q(T)) \\
&\quad + p^2[O(Q(T))]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + O(Q(T)) \quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

则(2.4)成立。

定理 2.2 设 $x(t)$ 满足(1.3)—(1.5)，给定足够大的自然 $p(p \gg p_0)$，$\hat{p}_0$ 由(1.7)式确定。则当 $T \to \infty$ 时，$\hat{p}_0 \to p_0$ a.s.

证 根据引理 2.1 推论

当 $0 \leqslant k \leqslant p_0 - 1$，$D(k) > 0$；

当 $k = p_0$，$D(k) = 0$。

只需证明

$$
|\hat{D}(k) - D(k)| = O(Q(T)) \quad \text{a.s.}, k = 1, 2, \cdots, p_0. \tag{2.9}
$$

根据(2.4)和(2.5)

$$
\sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + O(Q(T)) \quad \text{a.s.}, k = 1, 2, \cdots, p.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(k) &= \left(\sum_{i=1}^{k} \hat{\lambda}_i \Big/ \sum_{i=1}^{p} \hat{\lambda}_i \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + O(Q(T))}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i + O(Q(T))} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + O(Q(T)) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (S^2(k) + O(Q(T))^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.s.}$$

从而

$$\hat{D}(k) = 1 - \hat{S}(k)$$

$$= \frac{1 - S^2(k) + O(Q(T))}{1 + \sqrt{S^2(k) + O(Q(T))}}$$

$$= 1 - S(k) + O(Q(T)) = D(k) + O(Q(T)) \quad \text{a.s.}$$

即(2.9)式成立

对充分大的 T

$$\hat{D}(k) = D(k) + O(Q(T)) > \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}, \ k = 1, 2, \cdots, p_0 - 1,$$

$$\hat{D}(p_0) = O(Q(T)) < \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以当 $T \to \infty$ 时，$\hat{p}_0 \to p_0$ a.s.

三、参数估计的强相容性

本节讨论参数估计的强相容性。我们首先给出高阶 Yule-Walker 方程及估计。

式(1.3)两端同乘以 $x(t-k)$ 后取数学期望得

$$\sum_{i=0}^{p_0} a_i r(k-i) = \sigma^2 \cdot \delta_{k,0}, \ k \geqslant 0,$$

上式中取 $k = p_0 + 1, p_0 + 2, \cdots, 2p_0$ 即得高阶 Yule-Walker 方程(1.8)，参数估计由(1.9)式确定。

定理 3.1　假定(1.3)，(1.4)和(1.5)成立，则由(1.9)确定的参数估计 $\hat{a}$ 是强相容的，且

$$\hat{a} = a + O(Q(T)) \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

证　根据引理 2.1 知 R_{p_0} 满秩，又由[6](定理 4.4)可知

$$\begin{aligned} \hat{R}_{p_0} &= R_{p_0} + O(Q(T)) \quad \text{a.s.} \\ \hat{r}_{p_0} &= r_{p_0} + O(Q(T)) \quad \text{a.s.} \end{aligned} \tag{3.2}$$

故当 T 充分大时 $\hat{R}_{p_0}$ 亦满秩。由于

$$\begin{aligned} \hat{a} - a &= -\hat{R}_{p_0}^{-1}\hat{r}_{p_0} + R_{p_0}^{-1} r_{p_0} \\ &= -R_{p_0}^{-1}(\hat{r}_{p_0} - r_{p_0}) - (\hat{R}_{p_0}^{-1} - R_{p_0}^{-1})\hat{r}_{p_0} \\ &= -R_{p_0}^{-1}(\hat{r}_{p_0} - r_{p_0}) + R_{p_0}^{-1}(\hat{R}_{p_0} - R_{p_0})\hat{R}_{p_0}^{-1}\hat{r}_{p_0} \\ &= -R_{p_0}^{-1}[(\hat{r}_{p_0} - r_{p_0}) + (\hat{R}_{p_0} - R_{p_0})\hat{a}], \end{aligned} \tag{3.3}$$

则

$$[I + R_{p_0}^{-1}(\hat{R}_{p_0} - R_{p_0})](\hat{a} - a) = -R_{p_0}^{-1}[(\hat{r}_{p_0} - r_{p_0}) + (\hat{R}_{p_0} - R_{p_0})a] \tag{3.4}$$

记 $R_{p_0}^{-1} = (\mu_{ij})_{p \times p}$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant p_0}\left|\sum_{k=1}^{p_0}\sum_{l=1}^{p_0}\mu_{jk}[\hat{r}(p_0+k-l)-r(p_0+k-l)]\cdot(\hat{a}_l-a_l)\right|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant p_0}\sum_{k=1}^{p_0}|\mu_{jk}|\cdot\sum_{l=1}^{p_0}|\hat{r}(p_0+k-l)-r(p_0+k-l)|\cdot\max_{1\leqslant l\leqslant p_0}|\hat{a}_l-a_l|$$

$$=\max_{1\leqslant j\leqslant p_0}|\hat{a}_j-a_j|\cdot O(Q(T))\quad \text{a.s.}$$

则等式(3.4)左端

$$[I+R_{p_0}^{-1}(\hat{R}_{p_0}-R_{p_0})]\cdot(\hat{a}-a)=[I+O(Q(T))]\cdot(\hat{a}-a)\quad \text{a.s.} \tag{3.5}$$

类似地,等式(3.4)右端

$$R_{p_0}^{-1}[(\hat{r}_{p_0}-r_{p_0})+(\hat{R}_{p_0}-R_{p_0})a]=O(Q(T))\quad \text{a.s.} \tag{3.6}$$

故由(3.5)和(3.6)

$$\max_{1\leqslant j\leqslant p_0}|\hat{a}_j-a_j|=O(Q(T))\quad \text{a.s.}$$

即得(3.1)式.

仿[9]我们给出残差方差的一种新的估计量

$$\hat{\sigma}^2=\hat{r}(0)+\hat{a}^\tau\cdot\hat{r}_0, \tag{3.7}$$

其中 $r_0=(r(1)r(2)\cdots r(p_0))^\tau$, $\hat{r}_0=(\hat{r}(1)\hat{r}(2)\cdots\hat{r}(p_0))^\tau$. 因为

$$\hat{\sigma}^2-\sigma^2=\hat{r}(0)-r(0)+(\hat{a}-a)^\tau r_0+(\hat{a}-a)^\tau(\hat{r}_0-r_0)+a^\tau(\hat{r}_0-r_0),$$

所以根据[6]及定理(3.1)可知 $\hat{\sigma}^2-\sigma^2=O(Q(T))$, a.s., 从而我们得到下面定理

定理 3.2 在定理 3.1 条件下,由(3.7)式确定的 σ^2 的估计 $\hat{\sigma}^2$ 是强相容的,且

$$\hat{\sigma}^2=\sigma^2+O(Q(T))\quad \text{a.s.} \tag{3.8}$$

有了以上两个结论,我们可以得到谱密度 $f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{|A(e^{-i\lambda})|^2}$ 的一致强相容估计

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{\hat{\sigma}^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left|\sum_{j=0}^{p_0}\hat{a}_je^{-ij\lambda}\right|^2},\quad |\lambda|\leqslant\pi. \tag{3.9}$$

定理 3.3 在定理 3.1 条件下,由(3.9)式确定的 $\hat{f}(\lambda)$ 是谱密度 $f(\lambda)$ 的一致强相容估计,且

$$\sup_{-\infty<\lambda<+\infty}|\hat{f}(\lambda)-f(\lambda)|=O(Q(T))\quad \text{a.s.} \tag{3.10}$$

其证明思想与定理 3.1 类似, 故不详述. 只须注意到 $A(z)$ 的零点都在单位圆外.

以上得到的残差方差的估计和谱估计都具有强相容性. 但是两个估计量仍然含有 $r(0)$ 的估计,因而分辨力还会受到影响. 如果我们假定 $\sigma^2=1$, 那么定理 3.3 给出了谱密度 $f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{|A(e^{-i\lambda})|^2}$ 的一个具有高分辨力的一致强相容估计. 这在实际中是很有价值的. 借助于[2]中的方法不难得到 σ^2 的相容估计,其估计方法不受 $\hat{r}(0)$ 的影响, 从而可以得到具有高分辨力的谱估计. 但这种方法是非线性的, 给计算带来许多不便.

四、参数估计的渐近性质

本节我们讨论由(1.9)式确定的参数估计和由(3.8)式确定的谱估计的渐近正态性。记 $p_0\times(2p_0+1)$ 矩阵 H

$$H=\begin{bmatrix}0 & a_{p_0} & a_{p_0-1} & \cdots & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{p_0} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{p_0} & a_{p_0-1} & a_{p_0-2} & a_{p_0-2} & \cdots & 1\end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

则

$$(\hat r_{p_0}-r_{p_0})+(\hat R_{p_0}-R_{p_0})a=H\cdot\begin{bmatrix}\hat r(0)-r(0)\\ \hat r_0-r_0\\ \hat r_{p_0}-r_{p_0}\end{bmatrix},$$

$$(\hat r_{p_0}-r_{p_0})+(\hat R_{p_0}-R_{p_0})\hat a=\hat H\cdot\begin{bmatrix}\hat r(0)-r(0)\\ \hat r_0-r_0\\ \hat r_{p_0}-r_{p_0}\end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

其中 $\hat H$ 为H的估计量，只须用 $\hat a$ 代替H中 a 即得 $\hat H$，于是由(3.3)式可表

$$\hat a-a=-R_{p_0}^{-1}\hat H(\hat r-r), \tag{4.3}$$

其中

$$r=\begin{bmatrix}r(0)\\ r_0\\ r_{p_0}\end{bmatrix},\quad \hat r=\begin{bmatrix}\hat r(0)\\ \hat r_0\\ \hat r_{p_0}\end{bmatrix}.$$

定理 4.1　设 $x(t)$ 为 $AR(p_0)$ 序列且满足(1.3),(1.4)和(1.5)，则当 $T\to\infty$ 时，$\sqrt{T}(\hat a-a)\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,\Sigma_0)$。其中 $\Sigma_0=R_{p_0}^{-1}\cdot H\cdot G\cdot H^\tau R_{p_0}^{-\tau}$；$G$ 为 $2p_0+1$ 阶方阵，若 $x(t)$ 又为正态序列时G的第 i 行第 j 列元素

$$g_{ij}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(r(i+k)r(j+k)+r(i-k)r(j+k)),\ 1\leqslant i,j\leqslant 2p_0+1. \tag{4.4}$$

否则G的元素表达较繁，可参见[10, 326 页]

定理的证明从下一定理即得：

定理 4.2　在定理 4.1 条件下，设 $b=\begin{pmatrix}a\\ \sigma^2\end{pmatrix}$ 的估计是 $\hat b=\begin{pmatrix}\hat a\\ \hat\sigma^2\end{pmatrix}$，那么当 $T\to\infty$ 时，$\sqrt{T}(\hat b-b)\xrightarrow{\mathscr{D}}N(0,\Sigma_1)$，其中

$$\Sigma_1=\begin{pmatrix}\Sigma_0 & R_{p_0}^{-1}HG(H_1-H^\tau R_{p_0}^{-\tau}r_0)\\ (H_1^\tau-r_0^\tau R_{p_0}^{-1}H)GH^\tau R_{p_0}^{-\tau} & (H_1^\tau-r_0^\tau R_{p_0}^{-1}H)G(H_1-H^\tau R_{p_0}^{-\tau}r_0)\end{pmatrix},$$

且 $H_1=(1a_1a_2\cdots a_{p_0}0\cdots0)^\tau$ 为 $2p_0+1$ 维向量.

证　注意到

$$\hat\sigma^2-\sigma^2=(\hat H_1^\tau-r_0^\tau R_{p_0}^{-1}\hat H)\cdot(\hat r-r), \tag{4.5}$$

其中 $\hat H_1=(1\,\hat a_1\,\hat a_2\cdots\hat a_{p_0}0\cdots0)^\tau$ 为 $2p_0+1$ 维向量。使用[11, 329 页]中的技巧，再利用定理 3.2，[6，定理 4]和[10, 338 页]中的结论即知定理成立。

类似地，可得到如下结论

高阶 Yule-Walker 估计和矩估计模拟结果

	估计方法	a_1				a_2				a_3			
		真参数值	样本均值	样本方差	样本均方误差	真参数值	样本均值	样本方差	样本均方误差	真参数值	样本均值	样本方差	样本均方误差
例 1	HOYW	−0.98	−0.95694	0.00058	0.00111								
	YW		−0.95694	0.00062	0.00115								
例 2	HOYW	−0.85	−0.84052	0.0045	0.00054								
	YW		−0.84636	0.0029	0.00031								
例 3	HOYW	−1.8	−1.79097	0.00273	0.00282	0.81	0.80173	0.00264	0.00271				
	YW		−1.58565	0.01760	0.06355		0.59834	0.01697	0.06177				
例 4	HOYW	−1	−0.98891	0.00021	0.00034		0.88931	0.00024	0.00036				
	YW		−0.90818	0.00236	0.01079		0.84082	0.00096	0.00460				
例 5	HOYW	−0.9	−0.88315	0.02167	0.02196	−0.81	−0.81509	0.01596	0.01599	0.72	0.71317	0.01752	0.01757
	YW		−0.67482	0.08250	0.13321		−0.71729	0.05641	0.06500		0.41200	0.02874	0.12360
例 6	HOYW	0.9	0.87504	0.02196	0.02258	−0.8	−0.80530	0.02021	0.02024	−0.71	−0.70214	0.00970	0.00995
	YW		0.81672	0.07315	0.08008		−0.60948	0.06541	0.10170		−0.45210	0.02303	0.09373

定理 4.3　在定理 4.1 条件下，对任意的自然数 n 及任意 n 个两两不相同的实数 ω_1, $\omega_2, \cdots, \omega_n \in [-\pi, \pi]$，当 $T \to \infty$ 时

$$\sqrt{T}(\hat{f}(\omega_1) - f(\omega_1), \hat{f}(\omega_2) - f(\omega_2), \cdots, \hat{f}(\omega_n) - f(\omega_n)) \xrightarrow{\mathscr{D}} N(0, \Sigma_2)$$

其中 $\Sigma_2 = H_2 \cdot \Sigma_1 \cdot H_2^T$，$H_2$ 为 $n \times (p_0 + 1)$ 矩阵

$$H_2 = \frac{4\pi}{\sigma^2}\begin{bmatrix} f^2(\omega_1)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-1)\omega_1 \cdots f^2(\omega_1)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-p_0)\omega_1 & \frac{1}{4\pi}f(\omega_1) \\ f^2(\omega_2)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-1)\omega_2 \cdots f^2(\omega_2)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-p_0)\omega_2 & \frac{1}{4\pi}f(\omega_2) \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots & \cdots \\ f^2(\omega_n)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-1)\omega_n \cdots f^2(\omega_n)\sum_{j=0}^{p_0} a_j\cos(j-p_0)\omega_n & \frac{1}{4\pi}f(\omega_n) \end{bmatrix}$$

五、模 拟 结 果

通过前几节的讨论，我们得到了自回归模型阶的强相容估计，并且证明了高阶 Yule-Walker 估计的强相容性和渐近正态性。由于 $\hat{r}(0)$ 不是 $r(0)$ 的精确估计，而除 $k=0$ 之外 $\hat{r}(k)$ 为 $r(k)$ 的精确估计，如果一个估计中使用了 $\hat{r}(0)$，其估计精度必然受到影响。由于自回归参数的矩估计使用了 $\hat{r}(0)$，而高阶 Yule-Walker 估计则避开了 $\hat{r}(0)$，所以后者比前者精度要高，从而由后者得到的谱估计比由前者得到的估计具有较高的分辨力。前一点可以通过下面的模拟结果得到证明。

利用高阶 Yule-Walker 估计和矩估计（Yule-Walker 估计），对三种不同类型的 6 个自回归序列进行了模拟计算。根据 30 组样本长度为 $T=200$ 的数据对每个参数分别计算其样本均值、样本方差和样本均方误差，这些值都列在表中。模拟结果表明，高阶 Yule-Walker 估计比矩估计精度高。特别是自回归阶越高时，结果越明显。两种估计方法分别简记为 HOYW 和 YW。

参　考　文　献

[1] Chan, Y. T. and Langford, R. P., Spectral Estimation Via the High Order Yule-Walker Equation. *IEEE*, Assp-30(1982), 689—698.

[2] Pagano, M., Estimation of Models of Autoregressive Signal Plue White Noise. *The Ann. Statist.*, 2(1) (1974), 99—108.

[3] 林维斯，一种高分辨力的自回归谱估计法，中山大学研究生学刊，1(1985)，35—41.

[4] Beguin, T. M., Gourieroux, C. and Morfort, A., Identification of a mixed autoregressive-moving average process: the corner method. Time Series (ed. O D. Anderson), 423—436, North-Holland, 1980.

[5] Gantmacher, F. R., Applications of the Theory of Matrices. Interscience, New York, 1959.

[6] An Hongzhi, Chen Zhaoguo and Hannan, E. J., Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation. *The Ann. of Statist*, 10(1982), 926—936.

[7] Wang Shouren and Chen Zhaoguo, Estimation of the Order of ARMA Model by Linear Procedures. *Chin. Ann. of Math.* 6B(1) (1985), 53—70.

[8] Rao, C. R., Linear Statistical Inference and Its Applications (2nd, ed.), Yohn Wiley, New York, 1973.

[9] Box, G. E. P and Jenkins, G. M., Time Series Analysis, Revised Edition, Holden-Day, San Francisco. 1976.

[10] 安鸿志 陈兆国 杜金观 潘一民 时间序列的分析及其应用，科学出版社，北京，1983 年.

[11] Priestley, M. B., Spectral Analysis and Time Series. Academic Press, London, 1981.