山西大学学报（自然科学版）12(1)：36—42，1989
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

自回归过程逆自相关函数的估计*

刘维奇

摘要 这篇文章使用Kanto公式[8]给出了自回归过程逆自相关函数的一种直接估计方法。并且证明了这种估计的强相容性和渐近正态性

关键词 自回归过程，逆自相关函数。

一 引 言

逆自相关函数首先由*Cleveland*[1]提出的，他建议在ARMA模型识别当中使用逆自相关函数的估计代替偏自相关函数。这样的例子可参见〔2〕。逆自相关函数还可用于估计*ARMA*模型的参数(见〔3〕)。进一步过程X_t的逆自协方差阵$\Gamma^{(i)}=(\gamma^{(i)}_{j-k})$可以作为协方差阵$\Gamma=(\gamma_{j-k})$之逆的逼近（见〔4〕）。最近Battaglia[5]证明$1-(\gamma_0\cdot\gamma_0^{(i)})^{-1}$可以作为过程$X_t$的线性确定性的度量。通常逆自相关函数的估计有频域方法和时域方法两种（见〔6〕和〔7〕）。所谓频域方法就是首先估计过程的谱，然后再估计逆自相关函数；所谓时域方法就是首先估计过程的参数，然后再估计逆自相关函数。两种方法都是间接地得到逆自相关函数的估计，必然影响估计的精度。由Kanto公式[8]的启发，我们对自回归过程的逆自相关函数给出一种直接的估计方法，并在一定条件下证明这种估计具有强相容性与渐近正态性，证明强相容性的收敛速度为$O[(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}]$ $(T\to\infty)$，T为样本容量。另外，在〔8〕中作者没有严格证明$(\Gamma p+\Omega p)^{-1}$的存在性（Γp和Ωp由(2.5)和(2.6)给出），本文给出了证明。

二 逆自相关函数与自相关函数的关系

设X_t是平稳遍历的p阶自回归过程

$$\sum_{j=0}^{p}a_jX_{t-j}=\varepsilon_t \tag{2.1}$$

其中 $a_0=1$，$a_p\neq0$；

$$E\varepsilon_t=0,\quad E\varepsilon_t\cdot\varepsilon_s=\sigma^2\cdot\delta_{s,t} \tag{2.2}$$

令 $a(z)=\sum_{j=0}^{p}a_jz^j$，假定

---

*山西省自然科学基金资助课题
1987年12月4日收到

$$a(z)\neq 0, \qquad |z|\leqslant 1 \tag{2.2}$$

必要的时候，我们假定ε_t有有限四阶矩，即

$$E\varepsilon_t^4<+\infty \tag{2.4}$$

平稳过程X_t的自协方差函数、自相关函数和谱（或谱密度）分别为

$$\gamma_k=EX_t\cdot X_{t+k} \qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots$$

$$\rho_k=\gamma_k/\gamma_0$$

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\cdot e^{ik\lambda} \qquad |\lambda|\leqslant\pi$$

假定$f(\lambda)\geqslant m>0$,以便$1/f(\lambda)$是有限量。对于我们提到的自回归过程X_t,已假定其特征多项式$a(z)$的零点都在单位圆外，所以这一点即可保证。定义逆谱 $f^{(i)}(\lambda)=1/[(2\pi)^2\cdot f(\lambda)]$，则平稳过程$X_t$的逆自协方差函数和逆自相关函数分别为

$$\gamma_k^{(i)}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ik\lambda}\cdot f^{(i)}(\lambda)d\lambda \qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 1\cdots$$

$$\rho_k^{(i)}=\gamma_k^{(i)}/\gamma_0^{(i)}$$

令

$$\Gamma_p=(\gamma_{l-k})_{p\times p}=\begin{bmatrix}\gamma_0 & \gamma_1\cdots\gamma_{p-1}\\ \gamma_1 & \gamma_2\cdots\gamma_{p-2}\\ \cdots & \cdots\\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2}\cdots\gamma_0\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\Omega p=(\gamma_{l+k})_{p\times p}=\begin{bmatrix}\gamma_2 & \gamma_3\cdots\gamma_{p+1}\\ \gamma_3 & \gamma_4\cdots\gamma_{p+2}\\ \cdots & \cdots\\ \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2}\cdots\gamma_{2p}\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

类似地令 $R_p=(\rho_{l-k})_{p\times p}$，$\Delta_r=(\rho_{l+k})_{r\times r}$。

为给出逆自相关函数与自相关函数的关系，首先证明两个基本引理。

引理2.1 设X_t是满足（2.1）—（2.3）的自回归过程，则由自回归系数确定的$p+1$阶矩阵

$$H_0=\begin{bmatrix}1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ \cdots & \ddots & & \\ a_{p-1} & a_{p-2}\cdots 1 & & \\ 2a_p & 2a_{p-1}\cdots 2a_1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & & & a_p\\ & & a_p & a_{p-1}\\ & \diagup & & \cdots\\ & a_p\cdots & a_2 & a_1\\ a_p & a_{p-1}\cdots a_1 & & 1\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\triangleq H_1-H_2$$

是非奇异的。

证明 令

$$H=\begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ H_2 & H_1\end{bmatrix}$$

由于
$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} \cdot H \cdot \begin{pmatrix} I & -I \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1+H_2 & O \\ H_2 & H_1-H_2 \end{pmatrix}$$

其中I是单位矩阵。所以只需证明H是非奇异矩阵就可以了。又因为H_1是下三角矩阵，总可以对其施行初等变换，使其变为单位矩阵。即可以找到一个$p+1$阶非奇异矩阵E使得 $E\cdot H=I$且E是三角矩阵具有形式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots \ 1 & \\ * & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

令
$$F = \begin{bmatrix} I & O \\ O & E \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & O \\ -H_2 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

显然F是非奇异矩阵且为$2(p+1)$阶，而且
$$F \cdot H = \begin{bmatrix} I & E\cdot H_2 \\ O & (I-E\cdot H_2)(I+E\cdot H_2) \end{bmatrix}$$

由于
$$E\cdot H_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ * & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O & & & a_p \\ & & a_p & \\ & & \diagup & \\ & a_p & & \\ a_p & & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & a_p \\ & & a_p & \\ & & \diagup & \\ & a_p & & \\ \frac{1}{2}a_p & & & \end{bmatrix}$$

又由于（2.3）式及多项式$a(z)$之根与系数的关系保证了$0<|a_p|<1$，故矩阵$I\pm E\cdot H_2$是非奇异的，从而矩阵H是非奇异的，所以结论成立。

引理2.2 设X_t是满足（2.1）—（2.3)的平稳时间序列，γ_k, ρ_k，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$，分别是其自协方差函数和自相关函数，则由（2.5）和（2.6）式确定的自协方差阵Γ_p和Ω_p都是非奇异的，且$\Gamma_p+\Omega_p$也是非奇异的。因此R_p、Δ_p和$R_p+\Delta_p$亦非奇异。

证明 根据〔9〕(*Theorem* 1，*p*.431），自协方差函数满足p阶差分方程
$$\gamma_k + a_1\gamma_{k-1} + \cdots + a_p\gamma_{k-p} = 0,\ k\geqslant 1 \tag{2.8}$$
且p为满足此性质的最小整数，使用〔10〕(*Corollary of Theorem* 7，*p*.245)，即可知Γ_p和Ω_p均非奇异。

为证明$\Gamma_p+\Omega_p$是非奇异的，只需证明矩阵$\Gamma_p+\Omega_p$的行向量线性无关，即只需证明由等式
$$\sum_{l=1}^{p} \alpha_l\ (\gamma_{l-k}+\gamma_{l+k}) = 0 \qquad k=1,2,\cdots p$$
可以推知$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$，而它又等价于齐次线性方程组
$$D\cdot y=0$$
没有非零解，其中y为$2p+1$维变量，D为$2p+1$阶方阵
$$y=(y_1\ \ y_2\cdots y_{2p+1})^c,$$

$$D=\begin{pmatrix}\gamma_{p+1} & \gamma_p & \cdots\gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots\gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} \\ \gamma_{p+2} & \gamma_{p+1} & \cdots\gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \cdots\gamma_{p-3} & \gamma_{p-2} \\ & \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ \gamma_{2p} & \gamma_{2p-1} & \cdots\gamma_{p+1} & \gamma_p & \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_1\gamma_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\ 0 \\ & \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 & \cdots\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots\ 0 & 0\end{pmatrix}。$$

也就等价于证明D是非奇异矩阵。利用（2.8）式对D施行初等列变换，使其左上角变为，得到

$$D_1=\begin{pmatrix}O & \Gamma_p \\ H_0 & D_0\end{pmatrix}$$

其中D_0是$(p+1)\times p$矩阵，与D的右下角相同。

根据引理2.1及前一部分的证明可知D_1是非奇异矩阵，从而D是非奇异矩阵，故结论得证。

在引理2.2的保证之下，$Kanto$公式[8]给出了逆自相关函数与自相关函数的关系

$$\rho^{(i)}=-(\Gamma_p+\Omega_p)^{-1}\cdot\gamma=-(R_p+\Delta_p)^{-1}\cdot\rho \qquad (2.9)$$

其中$\rho^{(i)}=(\rho_1^{(i)}\rho_2^{(i)}\cdots\rho_p^{(i)})^c$，$\gamma=(\gamma_1\ \gamma_2\cdots\gamma_p)^c$和$\rho=(\rho_1\ \rho_2\cdots\rho_p)^c$。

三 逆自相关函数的估计及其渐近性质

现根据$Kanto$公式（2.9）给出逆自相关函数$\rho_k^{(i)}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$的估计。对于平稳自回归过程X_t，其逆自相关函数是截尾的，即当$k>p$时，$\rho_k^{(i)}=0$。又因为逆自相关函数是对称的，即$\rho_{-k}^{(i)}=\rho_k^{(i)}$。所以只需估计出$\rho_1^{(i)}$，$\rho_2^{(i)}$，$\cdots\rho_p^{(i)}$就是足够了。设$X_1$，$X_2$，$\cdots$，$X_T$是一组样本，$T$是样本长度（容量）记样本自协方差函数及样本自相关函数分别为

$$\hat{\gamma}_{-k}=\hat{\gamma}_k=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T-k}X_t\cdot X_{t+k} & 0\leqslant k\leqslant T-1\\ 0 & k\geqslant T\end{cases}$$

$$\hat{\rho}_k=\hat{\gamma}_k/\hat{\gamma}_0$$

类似于（2.5）和（2.6）式，令$\hat{\Gamma}_p=(\hat{\gamma}_{l-k})_{p\times p}$，$\hat{\Omega}_p=(\hat{\gamma}_{l+k})_{p\times p}$，$\hat{R}_p=(\hat{\rho}_{l-k})_{p\times p}$和$\hat{\Delta}_p=(\hat{\rho}_{l+k})_{p\times p}$。因此，我们得到逆自相关函数的估计

$$\hat{\rho}^{(i)}=-(\hat{\Gamma}_p+\hat{\Omega}_p)^{-1}\cdot\hat{\gamma}=-(\hat{R}_p+\hat{\Delta}_p)^{-1}\cdot\hat{\rho} \qquad (3.1)$$

其中 $\hat{\rho}^{(i)}=(\hat{\rho}_1^{(i)}\hat{\rho}_2^{(i)}\cdots\hat{\rho}_p^{(i)})^c$是逆自相关函数的估计，$\hat{\gamma}=(\hat{\gamma}_1\ \hat{\gamma}_2\cdots\hat{\gamma}_p)^c$和$\hat{\rho}=(\hat{\rho}_1\ \hat{\rho}_2\cdots\hat{\rho}_p)^c$。

利用〔11〕($Theorem$ 2)可以证明如下定理，由于篇幅所限，证明过程从略。

定理3.1 设X_t是满足(2.1)—(2.4)的自回归过程，则由(3.1)确定的逆自相关函数的估计是强相容的，即当$T\to\infty$时，$\hat{\rho}^{(i)}\to\rho^{(i)}$ a.s.且

$$\hat{\rho}^{(i)}-\rho^{(i)}=O(Q(T)) \qquad a.s.$$

其中$Q(T)=\left(\frac{\ln\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}}$。

为了给出估计的渐近正态性，定义如下矩阵

$$V=(v_{jk})_{p\times(p+1)}, \quad (1\leqslant j\leqslant p,\ 0\leqslant k\leqslant p)$$

其元素

$v_{l0}=\varphi_l$; $v_{lk}=\varphi_{l-k}+\varphi_{l+k}$, $1\leqslant k\leqslant p$; $1\leqslant i\leqslant p$ 其中约定 $\varphi_0=-1$; $\varphi_{-m}=\varphi_{p+m}=0$, $m>0$; $\varphi_m=\rho_m^{(i)}$, $1\leqslant m\leqslant p$。

$$V_1=(V\quad O)_{p\times(2p+1)}$$

$$W=\begin{bmatrix} \rho_1^{(i)} & \rho_2^{(i)} & \cdots & \rho_p^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_1^{(i)} & \cdots & \rho_{p-1}^{(i)} & \rho_p^{(i)} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_1^{(i)} & \rho_2^{(i)} & \cdots & \rho_p^{(i)} \end{bmatrix}_{p\times(2p-1)}$$

$$W_1=(O\quad W)_{p\times(2p+1)},\ U_1=V_1+W_1。$$

定理3.2 设X_t是满足(2.1)—(2.4)的自回归过程，且假定ε_t独立同分布。则由(3.1)确定的逆自相关函数的估计具有渐近正态性。即当T趋于无穷大时，$\sqrt{T}(\hat{\rho}^{(i)}-\rho^{(i)})$的联合分布渐近于正态分布$N(O,\ UGU')$。其中$U=(\Gamma_p+\Omega_p)^{-1}\cdot U_1$是$p\times(2p+1)$矩阵，$G=(g_{il})$是$2p+1$阶矩阵，由〔12〕($p$.326)给出。进一步，若假定$X_t$还是高斯(Gauss)过程，则$G$的第$i$行第$l$列元素

$$g_{il}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\gamma_{i+k}\cdot\gamma_{l+k}+\gamma_{i-k}\cdot\gamma_{l+k}),\ 0\leqslant i,l\leqslant 2p+1。$$

证明

$$\hat{\rho}^{(i)}-\rho^{(i)}=(\Gamma_p+\Omega_p)^{-1}\cdot U\hat{U}_1\cdot(\hat{\gamma}-\gamma) \qquad (3.2)$$

其中$\hat{U}_1$与U_1类似，只须用逆自相关函数的估计代替U_1中逆自相关函数即可。又由定理3.1知

$$\hat{U}_1\xrightarrow{p}U_1 \qquad (3.3)$$

利用〔12〕(p.339)和〔13〕(引理3，p.338)的结论并联合(3.2)和(3.3)即知结论成立。

本文所给出的逆自相关函数的估计方法具有较高的精确性，因为它是直接由样本自相关函数估出。由于通常所使用的方法估计次数较多，因而信息的损失亦较多，所以其精确性必然降低。希望本文对于给出平稳过程逆自相关函数的直接估计方法有较大的帮助。

参考文献

〔1〕 Cleveland W S. The invere autocorrelations of a time series and their applions. Technometrics, 1972; 14(2):277—298

〔2〕 McClave J T, Estimating of the order of moving average models: the max χ^2 method. Commun. Stat., 1978; A7 (3) : 259—276

〔3〕 常学将，刘维奇. 逆自相关函数G-谱估计的渐近性质. 第二届全国时间序列分析会议论文摘要集，武汉：华中理工大学，1987: 24-27

〔4〕 Bhansali R J. The evaluation of certain guadratic forms occuring in autoregressive model fitting. Ann. Stat., 1982; 10(1):121—131

〔5〕 Battaglia F. Inveres autocovariances and a measure of linear determinism for a stationary process. J. Time Ser.Anal. 1983; 2(2):79—87

〔6〕 Bhansali R J. The autoregressive and the window estmate of the inverse correlation function. Biometrica, 1980; 67(3):511—566

〔7〕 常学将，王明生.逆自相关函数的G-谱估计.科学通报，1986; 31(8):635

〔8〕 Kanto A J. A formula for the inverse autocorellation function of an autoregressive process.J. Time Ser. Anal., 1987; 8(3):311—312

〔9〕 Beguin J M, Gourieroux C, Monfort A. In Time Series: Anderson O D. Identiication of a mixed autoregressive-moving average process: the corner method. Nnrth-Holland publishing Campany, 1980 : 423—436

〔10〕 Gantmacher F R. Application of the Theory of Matrices. New york: Interscience, 1959: 245

〔11〕 An Hongzhi, Chen Zhaoguo, Hannan E J. Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation. Ann. Stat, 1982; 10(3): 926—936

〔12〕 Priestley M B. Spectral Analysis and Time Series. London: Academic Press, 1981: 339

〔13〕 安鸿志，陈兆国，杜金观，潘一民.时间序列的分析与应用.北京：科学出版社，1983: 838

ESTIMATION OF THE INVERSE AUTOCORRELATION FUNCTION OF AN AUTOREGRESSIVE PROCESS

Liu Weiqi

Abstract

In this paper, We give a direct method estimating the inverse autocorrelation function of an autoregressive process using Kanto's formula[8]。The strong consitency and asymptotic nomality of the estimation are proved, too。

Key words Autoregessive Process Invese Autocorrelation Funciton

新 书 评 介

中国科学院微生物研究所副研究员卯晓岚先生所编著的《毒蘑菇识别》一书已于1987年9月由科学普及出版社出版，定价1.70元。此书内容包括：前言；第一章，概述；第二章，毒蘑菇种类；第三章，毒蘑菇与中毒类型。最后还有六个附录，即Ⅰ.毒素及其毒菌；Ⅱ.形态特征及中毒类型表；Ⅲ.毒菌科、属系统及种数简表；Ⅳ.参考资料；Ⅴ.中名索引；Ⅵ.学名索引。在毒蘑菇种类一章内描述了172种，较1975年科学出版社出版的《毒蘑菇》内记载的多92种，也就是多出一倍以上，这当然是编著者在《毒蘑菇》基础上发掘、整理和进一步研究的成果，是值得庆贺的。在172种毒蘑菇中，属于子囊菌的有8种，属于担子菌的是164种，但子菌中又以伞菌为最多，极少量为耳菌、珊瑚菌、多孔菌、鬼笔类以及硬皮马勃类。此书对每一种毒蘑菇内容又分为中名、别名、学名、形态、生境与习性、产地、毒性等等，并且对每一项均有较为详尽地描述，可以使读者一目了然。对每一种均有精美的黑白线条图，对于一位真菌爱好者来说，用文字和图对照是能够定出正确的种名的。此书最前面还有两幅彩色图版。

《毒蘑菇识别》全书共有15万字，虽然是一本科普读物，但它的读者决不仅仅限于蘑菇爱好者，即使对真菌分类研究人员也同样是一本不可多得的有价值的好书。它对我国卫生防疫工作会起着更重要的作用。在此，特向各条战线上的读者推荐。 刘 波