1990年 第11卷 第4期 太原机械学院学报 Vol.11 No.4 1990
(总第32期)JOURNAL OF TAIYUAN INSTITUTE OF MACHINERY(Sum No.32)

ARMA模型阶的识别

潘晋孝 刘维奇

摘 要 本文给出了一种$ARMA(p,q)$模型的阶的估计，并证明了该估计的强相合性。
关键词 协方差函数；自回归模型；相容性

0 前 言

文献[1]中利用与高阶样本自协方差阵$R=\widehat{\gamma}(p_0+i-j)_{1\leqslant i,j\leqslant p_0}$有关的对称矩阵$R\cdot R^{\tau}$的特征根，给出了自回归模型$AR(p_0)$阶$p_0$的强相容估计．本文将此方法推广到自回归滑动平均模型$ARMA(p_0,q_0)$，同时证明所给估计仍具有强相合性.

设$\{x(t),\ t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$是实平稳遍历的$ARMA(p_0,q_0)$序列，满足

$$\sum_{j=0}^{p_0}a_j x(t-j)=\sum_{j=0}^{q_0}b_j\varepsilon(t-j) \tag{1}$$

其中，$a_0=b_0=1$，$a_{p_0}b_{q_0}\neq0$，$p_0\geqslant0$，$q_0\geqslant0$

且
$$E\varepsilon(t)=0,\ E\varepsilon(t)\varepsilon(s)=\sigma^2\delta_{s,t},\ E\varepsilon^4(t)<+\infty \tag{2}$$

记$A(z)=\sum_{j=0}^{p_0}a_jz^j$，$B(z)=\sum_{j=1}^{q_0}b_jz^j$，假定$A(z)$与$B(z)$互质，且

$$A(z)\neq0,\ B(z)\neq0,\ 当|z|\leqslant1 \tag{3}$$

平稳序列$x(t)$的自协方差函数和谱分别记为

$$\gamma(k)=Ex(t)x(t+k)\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{-ik\lambda}\qquad|\lambda|\leqslant\pi$$

对于我们所提到的$ARMA$序列$x(t)$，已假定其特征多项式$A(z)$，$B(z)$的零点均在单位圆外，这就保证了$f(\lambda)\geqslant C>0$,从而$1/f(\lambda)$有限.定义逆谱$f^{(i)}(\lambda)=1/[(2\pi)^2f(\lambda)]$，$|\lambda|\leqslant2\pi$. 则平稳序列$x(t)$的逆自协方差函数[2]为

$$\lambda^{(i)}(k)=\int_{-\pi}^{\pi}f^{(i)}(\lambda)e^{ik\lambda}\mathrm{d}\lambda\quad k=0,\pm1,\cdots \tag{4}$$

1 估计的方法

满足(1)～(3)的平稳序列$x(t)$，它的自协方差函数$\gamma(k)$和逆自协方差函数$\gamma^{(i)}(k)$

本稿于1990年3月5日收到.

分别有如下关系式

$$\gamma(k)+a_1\gamma(k-1)+\cdots+a_{p_0}\gamma(k-p_0)=0 \qquad k>q_0$$

$$\gamma^{(i)}(k)+b_1\gamma^{(i)}(k-1)+\cdots+b_{q_0}\gamma^{(i)}(k-q_0)=0 \quad k>p_0$$

记

$$R(p_0,q_0)\cdot A(p_0)=-U(p_0,q_0)$$

$$T(p_0,q_0)\cdot B(q_0)=-V(p_0,q_0)$$

其中

$$A(p_0)=(a_1,a_2\cdots,a_{p_0})^{\tau}$$

$$B(q_0)=(b_1,b_2\cdots,b_{q_0})^{\tau}$$

$$U(p_0,q_0)=(\gamma(q_0+1),\gamma(q_0+2),\cdots,\gamma(q_0+p_0))^{\tau}$$

$$V(p_0,q_0)=(\gamma^{(i)}(p_0+1),\gamma^{(i)}(p_0+2),\cdots,\gamma^{(i)}(p_0+q_0))$$

$$R(p_0,q_0)=\begin{pmatrix} \gamma(q_0) & \gamma(q_0-1) & \cdots & \gamma(q_0-p_0+1) \\ \gamma(q_0+1) & \gamma(q_0) & \cdots & \gamma(q_0-p_0+2) \\ \cdots & & \cdots & \\ \gamma(q_0+p_0-1) & \gamma(q_0+p_0-2) & \cdots & \gamma(q_0) \end{pmatrix}$$

$$T(p_0,q_0)=\begin{pmatrix} \gamma^{(i)}(p_0) & \gamma^{(i)}(p_0-1) & \cdots & \gamma^{(i)}(p_0-q_0+1) \\ \gamma^{(i)}(p_0+1) & \gamma^{(i)}(p_0) & \cdots & \gamma^{(i)}(p_0-q_0+2) \\ \cdots & & \cdots & \\ \gamma^{(i)}(p_0+q_0-1) & \gamma^{(i)}(p_0+q_0-2) & \cdots & \gamma^{(i)}(p_0) \end{pmatrix}$$

先祖略估计所研究问题的阶数(p',q')，令$p>p'$，$q>q'$，分别计算$\widehat{R}(p,q)\cdot\widehat{R}^{\tau}(p,q)$与$\widehat{T}(p,q)\cdot\widehat{T}^{\tau}(p,q)$的特征根，并重新排列

$$\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_p\geqslant0$$

$$\hat{\mu}_1\geqslant\hat{\mu}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\mu}_q\geqslant0$$

规定$\hat{\lambda}_0=0$，$\hat{\mu}_0=0$．且其中$\hat{\lambda}_i(i=1,2,\cdots,p)$与$q$有关，$\hat{\mu}_j(j=1,2,\cdots,q)$与$p$有关．

再计算逼近函数

$$\widehat{D}_{\lambda}(k)=1-\hat{s}_{\lambda}(k) \tag{5}$$

$$\widehat{D}_{\mu}(k)=1-\hat{s}_{\mu}(k) \tag{5'}$$

其中

$$\hat{s}_{\lambda}(k)=\left[\sum_{j=0}^{k}\hat{\lambda}_j\Big/\sum_{j=0}^{p}\hat{\lambda}_j\right]^{\frac{1}{2}}，\text{分母为0时}\ \hat{s}_{\lambda}(k)=1$$

$$\hat{s}_{\mu}(k)=\left[\sum_{j=0}^{k}\hat{\mu}_j\Big/\sum_{j=0}^{q}\hat{\mu}_j\right]^{\frac{1}{2}}，\text{分母为0时}\ \hat{s}_{\mu}(k)=1$$

p_0，q_0的估计分别为

$$\hat{p} = \inf_{q>q'} \inf_{k\geqslant 0} \left\{ k: \hat{D}_{\lambda}(k) < \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{6}$$

$$\hat{q} = \inf_{p>p'} \inf_{k\geqslant 0} \left\{ k: \hat{D}_{u}(k) < \left(\frac{\ln T}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{7}$$

其中，$\hat{p}$，$\hat{q}$的取值与p'，$q'(p'>p_0$，$q'>q_0)$所选择的具体值无关.

2 逆自协方差函数的估计

给定观测值$X(t)$，$(t=0,1,2,\cdots,T)$，T为样本长度，设样本的自协方差函数为

$$\hat{\gamma}(-k)=\hat{\gamma}(k)=\begin{cases} \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T-k} X(t)\cdot X(t-k) & 0\leqslant k\leqslant T-1 \\ 0 & k\geqslant T \end{cases}$$

以下用G-谱估计的方法来计算样本的逆自协方差函数$\hat{\gamma}^{(i)}(k)$.

首先定义一个变换e_n. 对任意给定的$k\geqslant 1$，$A_k=\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$及一固定的正整数$l$，定义$A_k$的$e_n$变换为

$$e_n[A_k,l]=\begin{vmatrix} A_k & A_{k+l} & \cdots & A_{k+nl} \\ a_k & a_{k+l} & \cdots & a_{k+nl} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k+(n-1)l} & a_{k+nl} & \cdots & a_{k+(2n-1)l} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_k & \cdots & a_{k+nl} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{k+(n-1)l} & \cdots & a_{k+(2n-1)l} \end{vmatrix}$$

再定义样本的谱密度，也就是谱密度$f(\lambda)$的G-谱估计

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= G(\lambda, k, N, h) \\ &\equiv e_k\left[\hat{\gamma}(0)+2\sum_{j=0}^{N}\hat{\gamma}_T(j)\cos j\lambda, h\right] \end{aligned}$$

其中，$0<N+(2k-1)h<T$，$|\lambda|\leqslant\pi$，$e_k[\cdot,\cdot]$为一个变换.

代入(4)式可以得到逆自协方差函数的G-谱估计

$$\hat{\gamma}^{(i)}(k)=\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}^{(i)}(\lambda)e^{ik\lambda}d\lambda,\quad k=0,\ \pm 1,\ \cdots$$

其中
$$\hat{f}^{(i)}(\lambda)=1/[4\pi^2\hat{f}(\lambda)]$$

这里得到的逆自协方差函数$\gamma^{(i)}(k)$的G-谱估计$\hat{\gamma}^{(i)}(k)$是强相容的(证明见[3]).

3　主要结果

引入记号$\Gamma(p,q)\overset{\Delta}{=}R(p,q)\cdot R^{\tau}(p,q)$，$\Delta(p,q)\overset{\Delta}{=}T(p,q)\cdot T^{\tau}(p,q)$．它们的估计量

$$\hat{\Gamma}(p,q)=\hat{R}(p,q)\cdot\hat{R}^{\tau}(p,q)$$

$$\hat{\Delta}(p,q)=\hat{T}(p,q)\cdot\hat{T}^{\tau}(p,q)$$

其中，$\hat{R}(p,q)$和$\hat{T}(p,q)$分别是$R(p,q)$与$T(p,q)$中的$\gamma(k)$和$\gamma^{(i)}(k)$由$\hat{\gamma}(k)$和$\hat{\gamma}^{(i)}(k)$所代替而得到的．

设$\Gamma(p,q)$，$\Delta(p,q)$，$\hat{\Gamma}(p,q)$和$\hat{\Delta}(p,q)$的特征根分别为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p \qquad \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_q$$

$$\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_p \qquad \hat{\mu}_1\geqslant\hat{\mu}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\mu}_q$$

记(5)式的$\hat{D}_{\lambda}(k)$，$\hat{D}_{\mu}(k)$的真实值分别为

$$D_{\lambda}(k)\overset{\Delta}{=}1-s_{\lambda}(k) \qquad D_{\mu}(k)\overset{\Delta}{=}1-s_{\mu}(k)$$

其中

$$s_{\lambda}(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\Big/\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 这里\lambda_0=0$$

$$s_{\mu}(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}\mu_i\Big/\sum_{i=0}^{q}\mu_i\right]^{\frac{1}{2}} \qquad 这里\mu_0=0$$

且若分母为0时，规定其比值为1．

为了给出主要结果，先给出如下引理：

引理1　设$x(t)$满足(1)～(3)，则

(1)　当$p=p_0$，$q>q_0$时，$det(R(p,q))\neq0$；

当$p>p_0$，$q>q_0$时，$R(p,q)$的秩不小于p_0；特别当$q\geqslant q_0+p-p_0$时，$R(p,q)$的秩等于p_0．

(2)　当$q=q_0$，$p>p_0$时，$det(T(p,q))\neq0$；

当$q>q_0$，$p>p_0$时，$T(p,q)$的秩不小于q_0；特别当$p\geqslant p_0+q-q_0$时，$T(p,q)$的秩等于q_0．

(3)　当$q-q_0\geqslant p-p_0\geqslant0$时，$\Gamma(p,q)$非负定，且有$p_0$个正特征根；

当$p-p_0\geqslant q-q_0\geqslant0$时，$\Delta(p,q)$非负定，且有$q_0$个正特征根．

证明　(1)当$p=p_0$，$q>q_0$时，$R(p,q)$恰为模型(1)的高阶Yule-Walker方程的系数矩阵，而Yule-Walker方程有唯一解，因而$det(R(p,q))\neq0$．

当$p>p_0$，$q>q_0$时，$R(p,q)$的右下角$p_0\times p_0$阶矩阵块正是$R(p,q)$．由上面的讨论知$det(R(p_0,q))\neq0$ $(q>q_0)$，那么矩阵$R(p,q)$的秩不小于p_0．

当$p>p_0$，$q\geqslant q_0+p-p_0$时，这里不妨假设$p=p_0+n$，则$q\geqslant q_0+n$，将$R(p,q)$分块

$$R(p,q)=\begin{pmatrix}C & D\\ E & R(p_0,q)\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|ccc}\gamma(q) & \gamma(q-1) & \cdots & \gamma(q-n+1) & \gamma(q-n) & \cdots & \gamma(q-p+1)\\ \gamma(q-1) & \gamma(q) & \cdots & \gamma(q-n+2) & \gamma(q-n+1) & \cdots & \gamma(q-p+2)\\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ \gamma(q+n-1) & \gamma(q+n-2) & \cdots & \gamma(q) & \gamma(q-1) & \cdots & \gamma(q-p+n)\\ \hline \gamma(q+n) & \gamma(q+n-1) & \cdots & \gamma(q-1) & \gamma(q) & \cdots & \gamma(q-p_0+1)\\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ \gamma(q+p-1) & \gamma(q+p-2 & \cdots & \gamma(q+p-n) & \gamma(q+p_0-1) & \cdots & \gamma(q)\end{array}\right)$$

其中，C为$n\times n$阶；D为$n\times p_0$阶；$R(p_0,q)$为$p_0\times p_0$阶矩阵．

令

$$H=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_{p_0} & & & 1 & & \\ & a_{p_0} & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 0 & & \\ & & & a_{p_0} & & 1\end{pmatrix}_{p\times p}$$

$$det(H)=1\neq0$$

则
$$R(p,q)\cdot H=\begin{pmatrix}0 & D\\ 0 & R(p_0,q)\end{pmatrix}$$

因为$R(p_0,q)$的秩为p_0，即$R(p_0,q)$满秩，所以$R(p,q)$的秩为p_0．

（2）　当$p>p_0$，$q=q_0$时，$T(p,q)$恰是模型(1)的Cleveland-parzen方程的系数矩阵，此方程有唯一解，从而得$det(T(p,q))\neq0$．

后面的证明步骤与(1)类同，用同样的方法可得出结论(2)成立．

（3）　$\Gamma(p,q)=R(p,q)\cdot R^{\tau}(p,q)$与$R(p,q)$的秩相等，由（1）知当$p\geqslant p_0$，$q\geqslant q_0+p-p_0$时，$R(p,q)$秩为$p_0$，那么当$q-q_0\geqslant p-p_0\geqslant0$时$\Gamma(p,q)$的秩为$p$，而$\Gamma(p,q)$显然非负定，故$\Gamma(p,q)$有$p_0$个正的特征根．

同理，当$p-p_0\geqslant q-q_0\geqslant0$时，$\Delta(p,q)$非负定，且有$q_0$个正的特征根，从而引理1得证．

引理2　设$x(t)$满足(1)～(3)，$\gamma_{ij}(p,q)$，$\hat{\gamma}_{ij}(p,q)$，$\gamma^{(i)}_{uv}(p,q)$和$\hat{\gamma}^{(i)}_{uv}(p,q)$（$1\leqslant i$，$j\leqslant p$，$1\leqslant u$，$v\leqslant q$）分别为$\Gamma(p,q)$，$\hat{\Gamma}(p,q)$，$\Delta(p,q)$及$\hat{\Delta}(p,q)$的元素，则

$$\hat{\gamma}_{ij}(p,q)=\gamma_{ij}(p,q)+O(Q(T))\qquad a.s.\qquad(8)$$

$$\hat{\gamma}_{uv}^{(i)}(p,q=\gamma_{uv}^{(i)}(p,q)+O\ (Q(T))\qquad a.s. \tag{8'}$$

其中，$Q\ (T)\ =\sqrt{\ln\ln T/T}$. 对$p\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]$，$q\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]$，$(\delta>0)$成立.

证明 根据[4] (Theorem 2)

当$p\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]$ $(\delta>0)$ 时，有$\hat{\gamma}(k)=\gamma(k)+O\ (Q(T))\qquad a.s.$

$$\hat{\gamma}_{ij}(p,q)=\sum_{l=q-p}^{q-1}(\hat{\gamma}(l+i)\cdot\hat{\gamma}(l+j))$$

$$=\sum_{l=p-q}^{q-1}(\gamma(l+i)+O(Q(T)))\cdot(\gamma(l+j)+O(Q(T)))$$

$$=\sum_{l=q-p}^{q-1}\gamma(l+i)\gamma(l+j)+\left[\sum_{l=q-p}^{q-1}\gamma(l+i)+\sum_{l=q-p}^{q-1}\gamma(l+j)\right]$$

$$\times O(Q(T))+p[O(Q(T))]^2\qquad a.s.$$

由于当$k\to\infty$时$|\gamma(k)|$以几何速度趋于0，所以，第二项为$O(Q(T))$，第三项为$o(Q(T))$，而第一项正是$\gamma_{ij}(p,\ q)$，从而$\hat{\gamma}_{ij}(p,\ q)=\gamma_{ij}(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.$ 成立.

同理可证$\hat{\gamma}_{uv}^{(i)}(p,\ q)=\gamma_{uv}^{(i)}(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.$ 也成立.

定理1 设$x(t)$满足(1)～(3)，则对任意给定的自然数p和q

$$\hat{\lambda}_j(p,\ q)=\lambda_j(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.\ 1\leqslant j\leqslant p \tag{9}$$

$$\hat{\mu}_j(p,\ q)=\mu_j(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.\ 1\leqslant j\leqslant q \tag{9'}$$

此外，对$p\leqslant o[(\ln T)^{1+\delta}]$，$q\leqslant o[(\ln T)^{1+\delta}]$ $(\delta>0)$，有

$$\sum_{j=1}^{k}\hat{\lambda}_j(p,\ q)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.\quad 1\leqslant k\leqslant p \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{k}\hat{\mu}_j(p,\ q)=\sum_{j=1}^{k}\mu_j(p,\ q)+O(Q(T))\qquad a.s.\quad 1\leqslant k\leqslant q \tag{10'}$$

其中，$Q(T)=[(\ln\ln T)/T]^{\frac{1}{2}}$

证明 引入矩阵的Frobenius范数$||\cdot||_F$对k阶矩阵$A=(a_{ij})_{k\times k}$定义

$$||A||_F=\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

而$||\cdot||_F$与向量的范数$||\cdot||_2$是相容的，即对一个k维向量Y

$$||AY||_2\leqslant||A||_F\cdot||Y||_2 \tag{12}$$

根据(8)和(11)式，对任给自然数k

$$||\hat{\Gamma}(k,\ q)-\Gamma(k,\ q)||_F=O(Q(T))\qquad a.s. \tag{13}$$

由〔5〕

$$\lambda_1=\sup_Y\left\{Y^\tau\Gamma(k,q)Y/Y^\tau Y\right\} \tag{14}$$

$$\lambda_{i+1}=\inf_{B_{k\times i}}\ \sup_{BY=0}\left\{Y^\tau\Gamma(k,q)Y/Y^\tau Y\right\}\quad i=1,2,\cdots,p-1 \tag{14'}$$

$$\lambda_p=\inf_Y\left\{Y^\tau\Gamma(k,q)Y/Y^\tau Y\right\} \tag{14''}$$

对于$\hat{\gamma}_i\ (1\leqslant i\leqslant p)$有类似的表达式，只需将$\Gamma(k,q)$换成$\hat{\Gamma}(k,q)$.

根据(12)～(14)

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_1&=\sup_Y\left\{Y^\tau\hat{\Gamma}(k,q)Y/Y^\tau Y\right\}\\&=\sup_Y\left\{Y^\tau[\Gamma(k,q)+\hat{\Gamma}(k,q)-\Gamma(k,q)]Y/Y^\tau Y\right.\\&\leqslant\sup_Y\left\{Y^\tau\Gamma(k,q)Y/Y^\tau Y\right\}+\sup_Y\frac{\|Y^\tau\|_2\cdot\|[\hat{\Gamma}(k,q)-\Gamma(k,q)]Y\|_2}{Y^\tau Y}\\&\leqslant\sup_Y\frac{Y^\tau\Gamma(k,q)Y}{Y^\tau Y}+\sup_Y\frac{\|Y^\tau\|_2\cdot\|\hat{\Gamma}(k,q)-\Gamma(k,q)\|_F\cdot\|Y\|_2}{Y^\tau Y}\\&=\sup_Y\frac{Y^\tau\Gamma(k,q)Y}{Y^\tau Y}+\|\hat{\Gamma}(k,q)-\Gamma(k,q)\|_F\\&=\lambda_1+O(Q(T))\qquad a.s.\end{aligned}$$

同理，$\hat{\lambda}_i=\lambda_i+O(Q(T))\qquad a.s.\ i=1,2,\cdots,p$，从而(9)式成立.

对$p\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]\ (\delta>0)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k\hat{\lambda}_i&=tr(\hat{\Gamma}(k,q))\\&=\sum_{i=1}^k\sum_{j=0}^{k-1}\hat{\gamma}^2(i+j)\\&=\sum_{i=1}^k\sum_{i=0}^{k-1}(\gamma(i+j)+O(Q(T)))^2\\&=\sum_{i=1}^k\sum_{j=0}^{k-1}\gamma^2(i+j)+2\sum_{i=1}^k\sum_{i=0}^{k-1}\gamma(i+j)\cdot O(Q(T))+p^2[O(Q(T))]^2\\&=\sum_{i=1}^k\lambda_i+O(Q(T))\qquad a.s.\end{aligned}$$

即(10′)成立

同理(9′)，(10′)式也成立. 从而定理得证.

定理2　设$x(t)$是满足(1)～(3)的自回归滑动平均序列，给定适当大的自然数p'，$q'(p'>p_0,\ q'>q_0)(\hat{p},\ \hat{q})$由(6)，(7)式确定．则

$$(\hat{p},\ \hat{q})\xrightarrow{a.s.}(p_0,\ q_0)\quad 当T\to\infty$$

这里，$(\hat{p},\hat{q})$的值与(p',q')取的具体值无关．

证明　根据引理1中的(3)，当$1\leqslant k\leqslant p_0-1$时，$D_\lambda(k)>0$；当$k=p_0$，$q>q_0$时，$\Gamma(p,q)$的秩不小于$p_0$，且当$q\geqslant q_0+p-p_0$时$\Gamma(p,q)$的秩等于$p_0$，此时$D_\lambda(k)=0$．

现在只需证明$|\hat{D}_\lambda(k)-D_\lambda(k)|=O(Q(T))\quad a.s.\ (1\leqslant k\leqslant p)$对某些$q$成立．

根据定理1 (9)和(10)，对任意给定的$p>p_0$总存在q，使$q\geqslant q_0+p-p_0$

$$\sum_{i=1}^{k}\hat{\lambda}_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+O(Q(T))\qquad a.s.\ 1\leqslant k\leqslant p$$

$$\hat{s}_\lambda(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}\hat{\lambda}_i\Big/\sum_{i=0}^{p}\hat{\lambda}_i\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i+O(Q(T))}{\sum_{i=0}^{p}\lambda_i+O(Q(T))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\Big/\sum_{i=0}^{p}\lambda_i+O(Q(T))\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[s_\lambda^2(k)+O(Q(T))\right]^{\frac{1}{2}}\qquad a.s.$$

从而

$$\begin{aligned}\hat{D}_\lambda(k)&=1-\hat{s}_\lambda(k)\\&=1-\left[s_\lambda^2(k)+O(Q(T))\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1-s_\lambda^2(k)+O(Q(T))}{1+\left[s_\lambda^2(k)+O(Q(T))\right]^{\frac{1}{2}}}\\&=1-s_\lambda(k)+O(Q(T))\\&=D_\lambda(k)+O(Q(T))\qquad a.s.\end{aligned}$$

即

$$|\hat{D}_\lambda(k)-D_\lambda(k)|=O(Q(T))\qquad a.s.$$

对充分大的T，存在一个自然数q，相应的有自然数k，使

$$\widehat{D}_{\lambda}(k)=D_{\lambda}(k)+O(Q(T))>(\ln T/T)^{\frac{1}{2}} \quad a.s.\ 1\leqslant k\leqslant p-1$$

$$\widehat{D}_{\lambda}(k)=D_{\lambda}(k)+O(Q(T))<(\ln T/T)^{\frac{1}{2}} \quad a.s.\ k\geqslant p$$

所以当$T\to\infty$时，$\hat{p}\to p_0 \quad a.s.$

同法可证得 $\hat{q}\xrightarrow{a.s.}q_0\ (T\to\infty)$

故 $(\hat{p},\ \hat{q})\xrightarrow{a.s.}(p_0,\ q_0)\ (T\to\infty)$

由引理1的(1)，(2)知，(6)和(7)所确定的$\hat{p}$，$\hat{q}$与p'，q'($p'>p_0$，$q'>q_0$)所取的具体值无关.

参考文献

1 刘维奇，常学将．自回归模型阶的一种强相容估计．山西大学学报，1987；(2)：1～6

2 Cleveland W S. The Inverse Autocorrelations of a Time Series and Their Applicati ns. Technometrics, 1972; 14:277～298

3 常学将，王明生．逆自相关函数的G-谱估计．科学通报，1986；31:635

4 An Hongzhi et al. Autocorrelation, Autoregression and Autoregressive Approximation. Ann. Statist, 1982; 10:926～936

5 Rao C R. Linear Statistical Inference and Its Applications 2nd, ed. New York: John Wileys, 1973; 62

IDENTIFICATION OF THE ORDER OF ARMA MODE

Pan Jinxiao Liu Weiqi

Abstract

In the paper, we give an estimation of the order of ARMA(p,q) model. The strong consistency of the estimation is proved, too.

Key words covariance function; autoregressive models; consistency