山西大学学报（自然科学版）13（2）：111-117，1990
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

逆自相关函数G-谱估计的渐近正态性

刘维奇　　常学将

（数学系）

摘要　本文证明了自回归滑动平均序列 ARPA（p，q）逆自相关函数 G-谱估计的渐近正态性。

关键词　逆自相关函数；渐近正态性

0　引言

近几年来，经过许多作者的研究发现逆自相关函数在 ARMA 模型识别和参数估计中起着很重要的作用（参见[1]）。本文证明了逆自相关函数 G-谱估计（见[2]）的渐近正态性。

设 $x(t)$，$t=0$，±1，±2，…是一个平稳遍历时间序列，满足

$$\sum_{j=0}^{p} a_j x(t-j)=\sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon(t-j) \tag{0.1}$$

其中 $a_0=b_0=1$，$a_p\cdot b_q\neq 0$，$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 且

$$E\varepsilon(t)=0,\ E\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(s)=\sigma^2\delta_{s,t},\ E\varepsilon(t)^4<\infty \tag{0.2}$$

记 $A(z)=\sum_{j=0}^{p} a_j z^j$，$B(z)=\sum_{j=0}^{q} b_j z^j$，假定 $A(z)$ 和 $B(z)$ 互质且当 $|z|\leqslant 1$ 时

$$A(z)\cdot B(z)\neq 0 \tag{0.3}$$

假定观察值为 X_t，$t=1$，2，…，T，T 为样本长度。设自协方差函数及样本自协方差函数分别为

$$r(k)=Ex(t)\cdot x(t+k)\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{0.4a}$$

$$\hat{s}(-k)=\hat{r}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k} X_t\cdot X_{t+k} & 0\leqslant k\leqslant T-1\\ 0 & k\geqslant T\end{cases} \tag{0.4b}$$

则相应的自相关函数及样本自相关函数分别为

1989．05．29收到。

$$\rho(k)=r(k)/r(0),\ \hat{\rho}(k)=\hat{r}(k)/\hat{r}(0)\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{0.5}$$

为方便起见，记 $Q(T)=(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}$

1 主要结果

逆自相关函数是由 Cleveland〔1〕提出的，〔2〕中给出了逆自相关函数的 G-谱估计，并且证明了它的强相合性，给出收敛速度 $O(Q(T))$。我们将给出它的渐近正态性的证明。

满足 (0.1)—(0.3) 的平稳过程 $x(t)$ 的谱密度为

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|B(e^{-i\lambda})|^2}{|A(e^{-i\lambda})|^2}\qquad |\lambda|\leqslant\pi \tag{1.1}$$

定义平稳过程 $x(t)$ 的逆谱、逆自协方差函数和逆自相关函数分别为（参见〔1〕，〔3〕）

$$f_i(\lambda)=\frac{1}{4\pi^2}[f(\lambda)]^{-1}\qquad |\lambda|\leqslant\pi \tag{1.2}$$

$$r_i(k)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}\cdot f_i(\lambda)d\lambda\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1.3}$$

$$\rho_i(k)=r_i(k)/r_i(0) \tag{1.4}$$

定义 $f(\lambda)$ 的 G-谱估计（参见〔4〕）

$$\hat{f}_G(\lambda)=\frac{1}{\pi}Re[e_p(\hat{F}_m)-\hat{F}_0]+\frac{1}{2\pi}\hat{r}(0),\qquad m\geqslant q \tag{1.5}$$

其中 $e_p(\cdot)$ 表示 e_p 一变换，$\hat{F}_m$ 为

$$F_m=\sum_{j=-n}^{m}r(j)\cdot e^{-ij\lambda}\qquad n>\max\{0,\ p-q-2\}$$

的估计量。

设 $\hat{a}=(\hat{a}_1\hat{a}_2\cdots\hat{a}_p)^{\tau}$ 为 AR 参数 $a=(a_1a_2\cdots a_p)^{\tau}$ 的高阶 *Yule-Walker* 估计（见〔5〕），由如下的高阶 *Yule-Walker* 方程确定

$$\begin{pmatrix} r(q) & r(q-1) & \cdots r(q-p+1) \\ r(q+1) & r(q) & \cdots r(q-p+2) \\ \cdots & & \cdots \\ r(q+p-1) & r(q+p-2) & \cdots r(q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} r(q+1) \\ r(q+2) \\ \vdots \\ r(q+p) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

简记为 $R_p\cdot a=-r_p$

使用〔4〕(Theorem 5)，由 (1.5) 定义的 G-谱估计可以简化为

$$f_G(\lambda)=\frac{1}{\pi}Re\left[\frac{\hat{F}_{m+1}+\hat{\alpha}_1\hat{F}_m+\cdots+\hat{\alpha}_p\hat{F}_{m-r+1}}{1+\hat{\alpha}_1+\cdots+\hat{\alpha}_p}-\hat{F}_0\right]+\frac{1}{2\pi}\hat{r}(0) \tag{1.7}$$

其中 $\hat{\alpha}_j=\hat{a}_j\cdot e^{-ij\lambda}$，$1\leqslant j\leqslant p$

将（1.7）代入（1.2）—（1.4）可以得到逆自协方差函数和逆自相关函数的G-谱估计

$$\hat{r}_i(k)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\hat{f}_i(\lambda)d\lambda \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \tag{1.8}$$

$$\hat{\rho}_i(k)=\frac{\hat{r}_i(k)}{\hat{r}_i(0)} \quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \tag{1.9}$$

而

$$\hat{f}_i(\lambda)=\frac{1}{4\pi^2}[\hat{f}_G(\lambda)]^{-1} \tag{1.10}$$

为给出主要结果，首先给出如下引理

引理1.1 设 $x(t)$ 是满足（0.1）—（0.3）的随机序列，AR 参数估计 $\hat{a}$ 由（1.6）确定，则 $\hat{a}$ 是 a 的强相合估计，且当 $T\to\infty$ 时，$\hat{a}-a=0(Q(T))$，$a.s.$

其证明与〔6〕（定理3.1）类似，故不重述。

为了方便起见，记

$$\mathbf{A}=(r(-n)\,r(-n+1)\cdots r(m+1)\,a_1 a_2\cdots a_p)^{\tau}$$

是 $m+n+p+2$ 维向量，那么其相应的估计量记为

$$\hat{\mathbf{A}}=(\hat{r}(-n)\ \hat{r}(-n+1)\cdots\hat{r}(m+1)\ \hat{a}_1\ \hat{a}_2\cdots\hat{a}_p)^{\tau}$$

再记

$$V_{\lambda}=(1\ \cos\lambda\ \cos 2\lambda\ \cdots\ \cos N\lambda)^{\tau}$$

且N为预先给定的正整数

$$W_{\lambda}=\left(\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{r}(-n)}\right)_A\cdots\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{r}(m+1)}\right)_A\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{a}_1}\right)_A\cdots\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{a}_p}\right)_A\right)^{\tau}$$

$$=\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{A}}\right)_A$$

通过简单计算，当 $m-p+1>0$ 时

$$\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{r}(j)}\right)_A=\begin{cases}0 & -n\leqslant j\leqslant -1\\ \dfrac{1}{2\pi} & j=0\\ \dfrac{1}{\pi}\cos j\lambda & 1\leqslant j\leqslant m-p+1\\ \dfrac{1}{\pi}Re\left[\dfrac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-j}e^{-i(m+1-j)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}e^{-ij\lambda}\right] & m-p+1<j\leqslant m+1\end{cases}$$

当 $m-p+1\leqslant 0$ 时

$$\left(\frac{\partial \hat{f}_G(\lambda)}{\partial \hat{r}(j)}\right)_A=\begin{cases} 0 & 1\leqslant j\leqslant m-p+1 \text{且} j\neq 1 \\ \frac{1}{\pi}Re\left[\left(\frac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-j}e^{-i(m+1-j)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}-1\right)e^{-ij\lambda}\right] & m-p+1<j<0 \\ \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}Re\left[\frac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1}e^{-i(m+1)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}-1\right] & j=0 \\ \frac{1}{\pi}Re\left[\frac{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_{m+1-z}e^{-i(m+1-z)\lambda}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}e^{-ij\lambda}\right] & 1\leqslant j\leqslant m+1 \end{cases}$$

而且对 $1\leqslant j\leqslant p$

$$\left(\frac{\partial \hat{f}_G(\lambda)}{\partial \hat{a}(j)}\right)_A=\frac{1}{\pi}Re\left[\left(\frac{F_{m-j+1}}{1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{F_{m+1}+a_1e^{-i\gamma}F_m+\cdots+a_pe^{-ip\lambda}F_{m-p+1}}{(1+a_1e^{-i\lambda}+\cdots+a_pe^{-ip\lambda})^2}e^{-ij\lambda}\right]$$

定理1.1 设 $x(t)$ 是满足（0.1)—(0.3) 的随机序列，假定线性新息 $\varepsilon(t)$ 是 iid，则对任意给定的正整数 N，当 $T\to\infty$ 时，$\sqrt{T}(\hat{r}_i(0)-r_i(0))$，$\sqrt{T}(\hat{r}_i(1)-r_i(1))$，…，$\sqrt{T}(\hat{r}_i(N)-r_i(N))$ 的联合分布渐近于正态 $N(0,\ \Sigma_0)$。其中 $\Sigma_0=H_1\cdot H_2\cdot G\cdot H_2^\tau\cdot H_1^\tau$ 且 G 为 $c=\max\{p+q,\ n,\ m\}+1$ 阶方阵，若 $x(t)$ 又为正态过程时，G 的第 i 行第 j 列元素为

$$g_{ij}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(r(i+k)\cdot r(j+k)+r(i-k)\cdot r(j+k)),\quad 1\leqslant i,j\leqslant c$$

若 $x(t)$ 为非正态过程时其表达较繁，可参见〔8〕(p.326)；

$$H_1=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}V_\lambda\cdot W_\lambda^\tau\cdot\frac{d\lambda}{f^2(\lambda)}$$

为 $(N+1)\times(m+n+p+2)$ 矩阵；

$$H_2=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c:c:c} 0 & I_n^* & \overbrace{\quad 0 \quad}^{c-n-1} \\ \hdashline I_{m+2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{R_p^{-1}D} & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}n \\ \}m+2 \\ \}p \end{array} \end{array} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{p+q+1}\ \underbrace{\qquad\quad}_{c-p-q-1} \end{array}$$

为 $(m+n+p+2)\times c$ 矩阵，而 I_{m+2} 为 $m+2$ 阶单位阵，I_n^* 为 n 阶反对角阵，其反对角元均为 1，D 可参见〔5〕或定理证明。

证明 将 $\hat{f}_G(\lambda)$ 作为 $\hat{\mathbf{A}}$ 的函数在 $\mathbf{A}$ 点的 $Taylor$ 展式为

$$\hat{f}_G(\lambda)=f(\lambda)+\left.\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{\mathbf{A}}^\tau}\right|_{\hat{A}=A^*}\cdot(\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{A}) \tag{2.11}$$

其中 $\mathbf{A}^{*}=\theta\cdot\hat{\mathbf{A}}+(1-\theta)\mathbf{A}$，$0<\theta<1$，且与 λ 有关。则

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{r}_i(0)-r_i(0)\\ \hat{r}_i(1)-r_i(1)\\ \vdots\\ \hat{r}_i(N)-r_i(N)\end{pmatrix}=-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\sqrt{T}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\hat{f}_G(\lambda)-f(\lambda)}{\hat{f}_G(\lambda)\cdot f(\lambda)}\cdot V_\lambda d_\lambda$$

$$\overset{\triangle}{=}\hat{H}\cdot\sqrt{T}\cdot\begin{pmatrix}\hat{r}-r\\ \hat{a}-a\end{pmatrix}\tag{1.12}$$

其中

$$\hat{H}_1=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}V_\lambda\cdot\hat{W}_\lambda^{\tau}\frac{d_\lambda}{\hat{f}_G(\lambda)\cdot f(\lambda)}$$

是一个 $(N+1)\times(m+n+p+2)$ 矩阵，且 $\hat{W}_\lambda=W_\lambda|_{A=A^{*}}$ 为 $m+n+p+2$ 维向量；并且 $r=(r(-n)\ r(-n+1)\cdots r(m+1))^{\tau}$

根据〔7〕（*Theorem* 2）和引理2.1，当 $T\to\infty$ 时

$$\hat{\mathbf{A}}\to\mathbf{A},\quad \mathbf{A}^{*}\to\mathbf{A}\quad a.s.\tag{1.13a}$$

从而由（1.3）可得

$$\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{r}(j)}\right)_{A^{*}}-\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{r}(j)}\right)_{A}\xrightarrow{a.s.}0\qquad \begin{array}{c}-n\leqslant j\leqslant m+1\\ \text{对}|\lambda|\leqslant\pi\text{一致成立}\end{array}\tag{1.13b}$$

$$\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{a}_j}\right)_{A^{*}}-\left(\frac{\partial\hat{f}_G(\lambda)}{\partial\hat{a}_j}\right)_{A}\xrightarrow{a.s.}0\qquad \begin{array}{c}1\leqslant j\leqslant p\\ \text{对}|\lambda|\leqslant\pi\text{一致成立}\end{array}\tag{1.13c}$$

因此，当 $T\to\infty$ 时

$$\hat{H}_1\to H_1\quad a.s.\tag{1.14}$$

又

$$\hat{a}-a=-R_p^{-1}\cdot D\cdot\begin{pmatrix}\hat{r}(0)-r(0)\\ \hat{r}(1)-r(1)\\ \vdots\\ \hat{r}(p+q)-r(p+q)\end{pmatrix}\tag{1.15}$$

其中 D 为 $p\times(p+q+1)$ 常数矩阵

$$D=\begin{pmatrix} & & & D_1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_p & a_{p-1} & \cdots a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_p & \cdots a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots a_p & \cdots & & & a_1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\left.\right\}j=1,2,\cdots,p-q-1\\ \\ \\ \left.\right\}j=p-q,\cdots,p\end{array}$$

当 $q \geq [p/2]$ 时，D_1 的第 j $(1 \leq j \leq p-q-1)$ 行为

$$a_{q+j} \quad a_{q+j-1}+a_{q+j+1} \cdots a_{q+j-(p-q-j)}+a_p \quad a_{p+j-(p-q-j+1)} \cdots a_1 \quad 1 \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{p-j} \quad (1.16a)$$

当 $q < [p/2]$ 时，D_1 的第 j $\left(1 \leq j \leq \left[\frac{p}{2}\right]-q\right)$ 行为

$$a_{q+j} \quad a_{q+j-1}+a_{q+j+1} \cdots a_1 a_{q+j+(q+j-1)} \quad a_{q+j+(q+j)}+1 \quad a_{q+j+(q+j+1)} \cdots a_p \quad \underbrace{0 \cdots 0}_{2q+j} \quad (1.16b)$$

且 D_1 的第 $j\left(\left[\frac{p}{2}\right]-q < j \leq p-q-1\right)$ 行同 (1.16a)。

将 (1.15) 代入 (1.12) 右端得

$$\hat{H}_1 \cdot \sqrt{T} \begin{pmatrix} \hat{r}-r \\ \hat{a}-a \end{pmatrix} = \hat{H}_1 - \hat{H}_2 \cdot \sqrt{T}(\hat{r}_0 - r_0)$$

其中 $\hat{H}_2$ 为 $(m+n+p+2) \times c$ 矩阵，只需将 H_2 中 R_p 用 $\hat{R}_p$ 代替即得，并且 $r_0=(r(0)\ r(1) \cdots r(c-1))^{\tau}$。

根据〔7〕，当 $T \to \infty$ 时，$\hat{R}_p \xrightarrow{a.s.} R_p$，因此，$\hat{H}_2 \xrightarrow{a.s.} H_2$。考虑到 (1.14)，我们有 $\hat{H}_1 \cdot \hat{H}_2 \xrightarrow{a.s.} H_1 \cdot H_2$，当然 $\hat{H}_1 \cdot \hat{H}_2 \xrightarrow{P} H_1 \cdot H_2$。于是根据〔8〕(P.339) 和〔9〕(Corollary 2 to Theorem, P.249)，$\sqrt{T}(\hat{r}_i(0)-r_i(0))$，…，$\sqrt{T}(\hat{r}_i(N)-r_i(N))$ 的联合分布渐近于正态 $N(0, \sum_0)$，定理证毕。

类似地，我们有

定理1.2 在定理 1.1 条件下，对任意 N，当 $T \to \infty$ 时，$\sqrt{T}(\hat{\rho}_i(1)-\rho(1))$，…，$\sqrt{T}(\hat{\rho}_i(N)-\rho_i(N))$ 的联合分布渐近于正态 $N(0, \sum_1)$，其中 $\sum_1 = H \cdot \sum_0 \cdot H$ 且

$$H = \frac{1}{r_i(0)} \begin{pmatrix} -\rho_i(1) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho_i(2) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ -\rho_i(N) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N \times (N+1)}$$

至此为止，我们讨论并证明了逆自相关函数 G-谱估计的渐近正态性。利用逆自相关函数的 G-谱估计可以得到 MA 参数的 G-谱估计，从而可以进一步讨论它的渐近性质。

参考文献

〔1〕Cleveland W S. The invers autocorrelations of a time series and their applications. Technomebrics, 1972; 14(2): 277~298

〔2〕常学将，王明生。逆自相关函数的G-谱估计。科学通报，1986; 31(8): 635

〔3〕刘维奇．自回归过程逆自相关函数的估计．山西大学学报，自然科学版，1989；12(1)：36～41

〔4〕Morton MJ, Gray HL. The G-spectral estimator. JASA, 1984; 79: 692～701

〔5〕Gingras DF. Asymptotic properties of high-order Yule-Walker estimates of AR parameters of an ARMA time series. IEEE Assp, 1985; 33: 1095～1101

〔6〕常学将，刘维奇．AR模型识别及其参数的高阶Yule-Walker估计．应用数学学报，1989；12(2)：225～235

〔7〕An Hongzhi, Chen Zhaoguo, Hannan EJ. Autocorrelation, autoregression and autoregressive approximation. Ann. Statist., 1982; 10(3): 926～936

〔8〕Priestley MB. spectral analysis and time series. London. Academic press, 1981: 339

〔9〕Chou Yuan Shih, Teicher H. probability theory. New York: Springer-Verlag, 1978; 249

THE ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE G-SPECTRAL ESTIMATES OF THE INVERS AUTOCORRELATIONS

Liu Weiqi   Chang Xuejiang

Abstract

In this paper, we prove the asymptotic normality of the G-Spectral estimates of the invers autocorrelations of the autoregression-moving average sequence ARMA (p, q).

Key words the invers autorrelation function; the asymptotic normality