第4卷 第4期 1991年 10月
应用数学 MATHEMATICA APPLICATA
Vol.4 No.4 October 1991

ARMA模型阶的识别：特征根方法

刘维奇 潘晋孝

（山西大学 030006）

文献[1]中利用与高阶样本自协方差阵 $R=(\hat{r}(p_0+i-j))_{1\le i,j\le p_0}$（其中 $\hat{r}(k)$ 是样本自协方差函数）有关的对称矩阵 $R\cdot R^\tau$ 的特征根给出自回归模型 $AR(p_0)$ 阶 p_0 的强相合估计．这种定阶方法的优点是计算简便．本文将此方法推广到自回归滑动平均模型 $ARMA(p_0,\ q_0)$，并称此方法为特征根方法．

设 $\{x(t),\ t=0,\pm1,\cdots\}$ 是实平稳遍历的 $ARMA(p_0,\ q_0)$ 序列，满足

$$\sum_{j=0}^{p_0} a_j x(t-j)=\sum_{j=0}^{q_0} b_j e(t-j), \tag{1}$$

其中 $a_0=b_0=1$，$a_{p_0}\cdot b_{q_0}\neq 0$，$p_0\geqslant 0$，$q_0\geqslant 0$ 且

$$Ee(t)=0,\ Ee(t)\cdot e(s)=\sigma^2\delta_{s,t},\ Ee(t)^4<\infty. \tag{2}$$

记 $A(z)=\sum_{j=0}^{p_0} a_j z^j$，$B(z)=\sum_{j=0}^{q_0} b_j z^j$，假定 $A(z)$ 和 $B(z)$ 互质且

$$A(z)\neq 0,\ B(z)\neq 0,\ \text{当}\ |z|\leqslant 1\ \text{时}. \tag{3}$$

$x(t)$ 的自协方差函数和谱分别记为

$$r(k)=Ex(t)\cdot x(t+k),\ k=0,\pm1,\cdots,$$

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j)\cdot e^{-ij\lambda},\ |\lambda|\leqslant\pi.$$

对于所提到的平稳序列 $x(t)$，已假定 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的零点均在单位圆外，这就保证了 $f(\lambda)\geqslant C>0$．定义 $x(t)$ 的逆谱 $f^{(i)}(\lambda)=1/[4\pi^2\cdot f(\lambda)]$，则 $x(t)$ 的逆自协方差函数[2]

$$r^{(i)}(k)=\int_{-\pi}^{\pi} f^{(i)}(\lambda)\cdot e^{ik\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

熟知 $r(k)$ 和 $r^{(i)}(k)$ 满足差分方程

$$\sum_{j=0}^{p_0} a_j r(k-j)=0,\ k>q_0; \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{q_0} b_j r^{(i)}(k-j)=0,\ k>p_0. \tag{5}$$

记 $R(p,q)=(r(q+i-j))_{1\le i,j\le p}$，$T(p,q)=(r^{(i)}(p+i-j))_{1\le i,j\le q}$ 分别是 p 阶方阵和 q 阶方阵，其第 i 行第 j 列元分别为 $r(q+i-j)$ 和 $r^{(i)}(p+i-j)$．设 $\Gamma(p,q)=R(p,q)\cdot R^\tau(p,\ q)$ 和 $\Delta(p,q)=T(p,q)\cdot T^\tau(p,q)$ 的特征根分别为

$$\lambda_1(p,q)\geqslant\lambda_2(p,q)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p(p,q)\geqslant 0;$$

山西省自然科学基金资助课题

本文1988年6月20日收到。

$$\mu_1(p,q)\geqslant\mu_2(p,q)\geqslant\cdots\geqslant\mu_q(p,q)\geqslant 0.$$

设 X_1，X_2，…，X_T 是 $\{x(t)\}$ 的 T 个观测值，样本自协方差函数和样本逆自协方差函数[8]分别为

$$\hat{r}(-k)=\hat{r}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum\limits_{j=1}^{T-k}X_t\cdot X_{t+k}; & 0\leqslant k<T,\\ 0, & k\geqslant T.\end{cases}$$

$$\hat{r}^{(i)}(-k)=\hat{r}^{(i)}(k)=\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}^{(i)}(\lambda)\cdot e^{ik\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

其中 $\hat{f}^{(i)}(\lambda)=1/[4\pi^2\cdot\hat{f}_G(\lambda)]$；$\hat{f}_G(\lambda)$ 是 G 谱估计[4]，

$$\hat{f}_G(\lambda)=\hat{e}_n[\hat{r}(0)+2\sum_{j=1}^{N}\hat{r}(j)\cos j\lambda,\ h],\quad |\lambda|\leqslant\pi,$$

其中只须选取 n，N 和 h 满足 $0<N+(2n-1)h<T$，$n>\max\{0,p_0-q_0-2\}$；$e_n[\cdot,\cdot]$ 是 e_n 变换。利用样本自协方差函数和样本逆自协方差函数分别代替矩阵 Γ 和 Δ 中的自协方差函数和逆自协方差函数得到其估计量 $\hat{\Gamma}$ 和 $\hat{\Delta}$，记相应的特征根分别为 $\hat{\lambda}_1\geqslant\hat{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{\lambda}_q$ 和 $\hat{u}_1\geqslant\hat{u}_2\geqslant\cdots\geqslant\hat{u}_q$。定义

$$D_\lambda(k)=1-\left[\sum_{j=1}^{k}\hat{\lambda}_j(p,q)\Big/\sum_{j=1}^{p}\hat{\lambda}_j(p,q)\right]^{\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant k\leqslant p;$$

$$D_\mu(k)=1-\left[\sum_{j=1}^{k}\hat{u}_j(p,q)\Big/\sum_{j=1}^{q}\hat{u}_j(p,q)\right]^{\frac{1}{2}},\quad 0\leqslant k\leqslant q.$$

由此可以给出 $ARMA$ 模型阶的特征根识别方法：粗略估计所研究问题的阶 (p',q')，令 $p>p'$，$q>q'$。称

$$\hat{p}=\inf_{q>q'}\ \inf_{k\geqslant 0}\{k:\ \hat{D}_\lambda(k)<(\ln T/T)^{\frac{1}{2}}\};\tag{6}$$

$$\hat{q}=\inf_{p>p'}\ \inf_{k\geqslant 0}\{k:\ \hat{D}_\mu(k)<(\ln T/T)^{\frac{1}{2}}\}\tag{7}$$

为 $(p_0,\ q_0)$ 的估计。

使用[5]和[3]中关于样本自协方差函数与样本逆自协方差函数的强收敛速度的结果，并使用[1]中类似的方法可以得到以下结论。

定理1　设 $x(t)$ 满足(1)—(3)，则对任意给定的自然数 p 和 q，

$$\hat{\lambda}_j(p,q)=\lambda_j(p,q)+O[(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}]\quad a.\ s.\ j=1,2,\cdots,p.$$

$$\hat{u}_j(p,q)=\mu_j(p,q)+O[(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}]\quad a.\ s.\ j=1,2,\cdots,q.$$

此外，对 $p\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]$，$q\leqslant O[(\ln T)^{1+\delta}]$，$(\delta>0)$，

$$\sum_{j=1}^{k}\hat{\lambda}_j(p,q)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(p,q)+O[(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}]\quad a.\ s.\ 1\leqslant k\leqslant p,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\hat{u}_j(p,q)=\sum_{j=1}^{k}\mu_j(p,q)+O[(\ln\ln T/T)^{\frac{1}{2}}]\quad a.\ s.\ 1\leqslant k\leqslant q.$$

定理2　设 $x(t)$ 是满足(1)—(3)的自回归滑动平均序列。给定适当大的自然数 $p'(p'>p_0)$ 和 $q'(q'>q_0)$，$(\hat{p},\hat{q})$ 由(6)和(7)式确定，则当 $T\to\infty$ 时，$(\hat{p},\hat{q})\to(p_0,q_0)(a.\ s.)$，且 $(\hat{p},\ \hat{q})$ 与 $(p',\ q')$ 的选择无关。

参 考 文 献

1 刘维奇，常学将．自回归模型阶的一种强相容估计．山西大学学报，1987(2)：1～6

2 Cleveland W S. The Inverse Autocorrelations of a Time Series and Their Applications. *Technometrics*, 1972, 14: 277～298

3 常学将，王明生．逆自相关函数的G-谱估计．科学通报，1986，31(8)：635.

4 Gray H L, Houston A G, Morgan F W. On G-spectral Estimation. *Applied Time Series Analysis* (O. D. Anderson), Academic Press, Inc., 1978, 39～138

5 An Hongzhi, Chen Zhaoguo, Hannan E J. Autocorrelation, Autoregression and Autoregressive Approximation. *Ann. Statist.*, 1982, 10: 926～936

美国《数学评论》1991年分类表征订启事

《中国数学文摘》自1987年创刊以来，为便于国际交流，采用1980年美国《数学评论》分类表对我国数学工作者的论著进行分类。美国《数学评论》分类表，自1980年以来，曾几次修订、除出版1985年分类表外，今年又出版了1991年分类表。该表在1985年的基础上作了很多补充，除一级类目由原来的60个大类演变到1991年的61个大类外，二级、三级类目也作了较大的调整。如：原68—××计算机科学中有关数值计算方面的内容已调整到—××数值计算部分；原92—××生物学和行为科学由一级直插三级，无二级类目，三级类目也显得较粗。新表不仅增设了二级类目、而且分类更细、更便于读者检索。美国《数学评论》、《德国数学文摘》从1991年起启用新表对数学文献进行分类。

改革开放以来，我国数学发展很快，可望在本世纪末率先赶超世界先进水平。为适应这种发展的需要，为便于国际交流及国际联机检索，我编辑部从1992年起采用1991年美国《数学评论》分类表对我国数学工作者的论著进行分类。由于我国拥有此表的单位极少，为便于我国从事数学、物理、计算机科学及人文科学的工作者，对自己著作进行分类，为便于我刊的文摘员对所提供文摘进行分类，我编辑部拟将1991年美国《数学评论》分类表译为中文出版，10万字左右，只收工本费(价格待定)，欢迎各级图书馆、有关杂志编辑部及广大读者订阅。需此书者，请速与我编辑部孙海嵘同志联系(暂不寄钱来)。通讯地址：北京中关村中科院文献情报中心《中国数学文摘》编辑部。邮政编码：100080，电话2562784.

《中国数学文摘》编辑部