第9卷 第2期　　工 程 数 学 学 报　　Vol.9.No.2
1992年6月　　JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Jun.1992

ARMA 序列参数改进矩估计的强相合性①

潘晋孝　　刘维奇

(太原机械学院)　　(山西大学)

摘　要

文献[1]给出了 ARMA 序列自回归参数的一种改进的矩估计方法，并证明了估计的渐近正态性。本文证明了这种估计的强相合性，并讨论了其优效渐近正态性。

§1　引　言

设$x(t)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$是$ARMA$序列，满足

$$\sum_{i=0}^{p}\varphi_i x(t-i)=\sum_{j=0}^{q}\theta_j \varepsilon(t-j) \tag{1.1}$$

其中 $\varphi_0=\theta_0=1$, $\varphi_p\cdot\theta_q\neq 0$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$; $\{\varepsilon(t)\}$是独立同分布的线性新息序列，满足

$$E(\varepsilon(t)|\mathscr{F}_{t-1})=0 \qquad a.s.,\ 0<E^4(t)<\infty \tag{1.2}$$

而 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}\{\varepsilon(s):\ s\leqslant t\}$. 有时还假定

$$E(\varepsilon^2(t)|\mathscr{F}_{t-1}=\sigma^2 \tag{1.3}$$

记$\varphi(Z)=\sum_{i=0}^{p}\varphi_i Z^i$, $\theta(Z)=\sum_{j=0}^{q}\theta_j Z^j$，并假定$\varphi(Z)$和$\theta(Z)$互质，且当$|Z|\leqslant 1$时

$$\varphi(Z)\cdot\theta(Z)\neq 0 \tag{1.4}$$

用B表示一步后移算子. 记 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)^{\tau}$, $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q)^{\tau}$.

设 $X(t)$, $t=1, 2, \cdots, T$是T个观察值，T是样本长度. 记样本自协方差函数和样本自相关函数为:

$$\hat{r}_{-k}=\hat{r}_k=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T-k}X_t\cdot X_{t+k} & 0\leqslant k\leqslant T-1\\ 0 & k\geqslant T\end{cases},$$

①本文1989年6月3日收到.

$\hat{p}_k = \hat{r}_k / \hat{r}_0$

由如下方程确定的 $\hat{\varphi}_{yw} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \cdots, \hat{\omega}_p)$ 称为自回归参数 φ 的矩估计（或高阶 *Yule – Walker* 估计）．

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_q & \hat{p}_{q-1} & \cdots & \hat{p}_{q-p+1} \\ \hat{p}_{q+1} & \hat{p}_q & \cdots & \hat{p}_{q-p+2} \\ \cdots & \cdots & & \\ \hat{p}_{q+p-1} & \hat{p}_{q+p-2} & \cdots & \hat{p}_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{p}_{q+1} \\ \hat{p}_{q+2} \\ \vdots \\ \hat{p}_{q+p} \end{bmatrix}$$

在矩估计中实际上已假定 $\varphi(B)\hat{p}_k = 0 \ (k > q)$，但在实际中不应当严格为 0，应当是一误差量.

记 $e_k = \varphi(B)\hat{p}_k - \varphi(B)p_k = \varphi(B)\tilde{p}_k$．由于 $\varphi(B)p_k = 0 \ (k > q)$，故

$$e_k = \varphi(B) \cdot \hat{p}_k \qquad (k > q) \tag{1.5}$$

如果我们记 $\hat{y} = (\hat{p}_{q+1}, \hat{p}_{q+2}, \cdots, \hat{p}_{q+m})^\tau$,

$$e = (e_{q+1}, e_{q+2}, \cdots, e_{q+3})^\tau$$

$$\hat{x} = - \begin{bmatrix} \hat{p}_q & \hat{p}_{q-1} & \cdots & \hat{p}_{q-p+1} \\ \hat{p}_{q+1} & \hat{p}_q & \cdots & \hat{p}_{q-p+2} \\ \cdots & \cdots & & \\ \hat{p}_{q+m-1} & \hat{p}_{q+m-2} & \cdots & \hat{p}_{q-p+m} \end{bmatrix}_{m \times p}$$

m 的选取应满足 $m \geqslant p$，$m \leqslant O[(lnT)^{1+\delta}] \ (\delta > 0)$．则由 (1.5) 得到有限样本模型

$$\hat{y} = \hat{X}\varphi + e \tag{1.6}$$

若将 $R_1 = \mathrm{Var}(e) \overset{\wedge}{=} \left(p^{(1)}_{q+i\ q+j} \right)_{m \times m}$ 看成单位阵，Ee 近似看作 0，则由 (1.6) 式可得到 AR 参数的 LS 估计

$$\hat{\varphi}_{LS} = (\hat{X}^\tau \hat{X})^{-1} \hat{X}^\tau \hat{y} \tag{1.7}$$

但是 R_1 实际上并不能简单地看作单位阵，这是由于(见[1])

$$\begin{aligned} p^{(1)}_{q+i\ q+j} &= \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi(B)p_{s+q+i} \cdot \varphi(B)p_{s+q+j} + o\left(\frac{1}{T}\right) \\ &\overset{\wedge}{=} \frac{1}{T} p_{q+i\ q+j} + o\left(\frac{1}{T}\right) \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant m \end{aligned} \tag{1.8}$$

记 $R = (p_{q+i}\ \ p_{q+j})_{m \times m}$.

则

$$R_1 = \frac{1}{T} R + o\left(\frac{1}{T}\right)) \tag{1.9}$$

从(1.6)式我们可以得到 AR 参数 φ 的Gauss – Marlcov估计

$$\hat{\varphi}_{GM} = (\hat{X}^{\tau} R_1^{-1} \hat{X})^{-1} \hat{X}^{\tau} R_1^{-1} \hat{y} \tag{1.10}$$

为了计算简单，将(1.9)式代入(1.10)式我们有

$$\hat{\varphi}^{(1)}_{GM} (\hat{X}^{\tau} R^{-1} \hat{X})^{-1} \hat{X}^{\tau} R^{-1} \hat{y} \tag{1.11}$$

在[1]中称为近似的$G-M$估计．

然而由(1.11)式确定的估计中的R．其元素$p_{q+i\,q+j}$依赖于AR参数φ和自相关函数p_k，所以仍不能实际应用．因此，我们再用φ的矩估计代替φ，用$\hat{p}_k$代替p_k，得到如下改进的矩估计

$$\hat{\varphi}_m = (\hat{X}^{\tau} \hat{R}^{-1} \hat{X})^{-1} \hat{X}^{\tau} \hat{R}^{-1} \hat{y} \tag{1.12}$$

在MA参数估计中利用$\hat{\varphi}_m$代替$\hat{\varphi}_{yw}$可以得到MA参数的改进估计．

文献[1]中已经证明了(1.12)的渐近正态性，我们将主要讨论其强相合性，并讨论其优效渐近正态性．

§2　改进矩估计的强相合性

在这一节我们讨论改进矩估计(1.12)的强相合性．为此，首先引入如下引理

引理2.1　设$x(t)$满足(1.1)、(1.2)和(1.4)，则

$$\hat{R} - R = O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{2.1}$$

其中 $Q(T) = (ln\ ln\ T/T)^{\frac{1}{2}}$.

证明　记 $\varphi(B) = 1 + \varphi_1 B + \cdots + \varphi_p B^p$, $\hat{\varphi}_{yw} = (\hat{\varphi}_1, \cdots \hat{\varphi}_p)^{\tau}$ 是矩估计(即高阶 Yule－walker 估计)．我们首先证明对任意 $0 \leqslant \alpha < \infty$，$K_T = (log\ T)^{\alpha}$.

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant K_T} \left| \hat{\varphi}(B)\hat{p}_k - \varphi(B)p_k \right| = O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{2.2}$$

事实上，因为

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}(B)\hat{p}_k - \varphi(B)p_k \\
&= \hat{\varphi}(B)\hat{p}_k - \hat{\varphi}(B)p_k + \hat{\varphi}(B)p_k - \varphi(B)p_k \\
&= \hat{\varphi}(B)(\hat{p}_k - p_k) + (\hat{\varphi}(B) - \varphi(B))p_k \\
&= (\hat{\varphi}(B) - \varphi(B))(\hat{p}_k - p_k) + \varphi(B)(\hat{p}_k - p_k) + (\hat{\varphi}(B) - \varphi(B))p_k
\end{aligned}$$

根据[2](定理1)及[3](定理3.1)即知(2.2)式成立．

由于 $\hat{p}_k = \hat{p}_{-k}$, $\rho_k = \rho_{-k}$，所以同理可得

$$\max_{-1 \leqslant k \leqslant -K_T} \left| \hat{\varphi}(B)\hat{p}_k - \varphi(B)p_k \right| = O(Q(T)) \qquad a.s.$$

又当 $k=0$时，$\hat{p} = p_0 = 1$，从而有

$$\max_{|k| \leqslant -K_T} \left| \hat{\varphi}(B)\hat{p}_k - \varphi(B)p_k \right| = O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{2.3}$$

其中 $K_T=(\log\ T)^{\alpha}$， $\leqslant\alpha<\infty$。

因为$|r(k)|$以几何速度趋于零。那么 $\sum_{k=1}^{\infty}r(k)$ 收敛，再由 $\varphi(B)$ 和 p_k 的定义可得．$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(B)p_{-k}$ 收敛，从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(B)p_{-k+i}\varphi(B)p_{-k+j}$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant m)$ 也收敛．于是存在一个正整数 M，使

$$\sum_{k=M}^{\infty}\varphi(B)p_{-k+i}\varphi(B)p_{-k+j}=O(Q(T))\qquad a.s. \tag{2.4}$$

成立．

记$\hat{R}$的第 i 行第 j 列元素为$\hat{p}_{q+i\ q+j}$，则$\hat{R}-R$ 的第 i 行第 j 列元素

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_{q+i\ q+j}-p_{q+i\ q+j}\\
&=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\sum_{s=-\infty}^{\infty}\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}\\
&=\sum_{s=-V}^{\infty}[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}]\\
&\quad+\sum_{s=N}^{\infty}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\sum_{s=N}^{-V}\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}\\
&\quad+\sum_{s=-\infty}^{-V}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\sum_{s=+\infty}^{-V}\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}
\end{aligned}$$

其中 $N=\max\{0,\ p-T+q\}$，$V=\max\{T+q+m,\ M-q\}$令

$$\begin{aligned}
A_1&=\sum_{s=-V}^{N}[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}]\\
&=\sum_{s=-V}^{N}\Big\{\varphi(B)p_{s+q+i}[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\varphi(B)p_{s+q+j}]\\
&\quad+[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}-\varphi(B)p_{s+q+i}]\cdot[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}-\varphi(B)p_{s+q+j}]\\
&\quad+[\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}-\varphi(B)p_{s+q+i}]\varphi(B)p_{s+q+j}\Big\}
\end{aligned}$$

根据(2.3)式我们有

$$\max_{1\leqslant i,\ j\leqslant m}A_1=O(Q(T))\qquad a.s.$$

注意 $\hat{p}_k=0,\ |k|\geqslant T$．由此知

$$A_2=\sum_{s=N}^{\infty}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}=0$$

$$A_4=\sum_{s=-\infty}^{-V}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+i}\hat{\varphi}(B)\hat{p}_{s+q+j}=0$$

注意 $\varphi(B)p_k=0\quad k>q$．则有

$$A_3=\sum_{j=N}^{\infty}\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}=0$$

由(2.4)式知

$$A_5=\sum_{j=-\infty}^{-V}\varphi(B)p_{s+q+i}\varphi(B)p_{s+q+j}=O(Q(T))\qquad a.s.$$

所以

$$\max_{1\le i,j\le m}\left|\hat{p}_{q+i\,q+j}-p_{q+i\,q+j}\right|=O(Q(T))\qquad a.s.\tag{2.5}$$

从而(2.1)成立．引理证毕．

引理2.2　设$x(t)$满足(1.1)、(1.2)和(1.4)，则

$$\hat{R}^{-1}\hat{X}-R^{-1}X=O(Q(T))\qquad a.s.\tag{2.6}$$

证明　记 $a=R^{-1}X$．$\hat{a}=\hat{R}^{-1}\hat{X}$

$$\hat{a}-a=\hat{R}^{-1}\hat{X}-R^{-1}X=R^{-1}(\hat{X}-X)+R^{-1}(R-\hat{R})\hat{a}$$

则

$$[I+R^{-1}(\hat{R}-R)](\hat{a}-a)=R^{-1}[(\hat{X}-X)+(R-\hat{R})a]\tag{2.7}$$

我们用 h_{ij} 表示 R^{-1} 的第 i 行第 j 列元素，类似于 [3](定理 3.1) 的证明方法可证 (2.6) 式成立。

定理 2.1　设 $x(t)$ 满足 (1.1)、(1.2) 和 (1.4)，则由 (1.12) 确定的$\hat{\varphi}_M$ 是 AR 参数 φ 的强相合估计，且

$$\hat{\varphi}_M-\varphi=O(Q(T))\qquad a.s.\tag{2.8}$$

证明　由于 $\varphi=(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}X^{\tau}R^{-1}y$．所以

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_M-\varphi\\
&=(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X})^{-1}\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}-(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}X^{\tau}R^{-1}y\\
&=(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}-X_{\tau}R^{-1}y)+[(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X})^{-1}-(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}]\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}\\
&=(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}\left[\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}-X^{\tau}R^{-1}y+(X^{\tau}R^{-1}X-\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X})\cdot\hat{\varphi}_M\right]
\end{aligned}\tag{2.9}$$

则

$$\begin{aligned}
&[I+(X_{\tau}R^{-1}X)^{-1}(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X}-X^{\tau}R^{-1}X)]\cdot(\hat{\varphi}_M-\varphi)\\
&=(X^{\tau}R^{-1}X)^{-1}[\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}-X^{\tau}Ry+(X^{\tau}R^{-1}X-\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X})\cdot\varphi]
\end{aligned}\tag{2.10}$$

又

$$\begin{aligned}
&\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X}-X^{\tau}R^{-1}X\\
&=X^{\tau}(\hat{R}^{-1}\hat{X}-R^{-1}X)+(\hat{X}^{\tau}-X^{\tau})(\hat{R}^{-1}\hat{X}-R^{-1}X)+(\hat{X}^{\tau}-X^{\tau})R^{-1}X
\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{y}-X^{\tau}R^{-1}y\\
&=X^{\tau}R^{-1}(\hat{y}-y)+(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}-X^{\tau}R^{-1})(\hat{y}-y)+(\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}X^{\tau}R^{-1})y
\end{aligned}\tag{2.12}$$

再由[2](定理1)，有

$$\hat{X} - X = O(Q(T)) \qquad a.s. \qquad \hat{y} - y = O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{2.13}$$

根据引理2.2. 有

$$\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1} - X^{\tau}R^{-1} = O(Q(T)) \qquad a.s \tag{2.14}$$

又由(2.11)式，根据引理2.2，显然有

$$\hat{X}^{\tau}\hat{R}^{-1}\hat{X} - \hat{X}^{\tau}R^{-1}X = O(Q(T)) \qquad a.s. \tag{2.15}$$

因此，由引理 2.2，(2.10) – (2.15) 式，有 [3](定理 3.1) 的证明方法不难得到 (2.8) 式．定理证毕．

§3 关于估计的优效渐近正态性的讨论

在[1]中，作者证明了这种估计的渐近正态性，即

$$\sqrt{T}(\hat{\varphi}_M - \varphi) \xrightarrow[T\to\infty]{L} N(0,\ X^{\tau}RX)^{-1}) \tag{3.1}$$

本节我们讨论$\hat{\varphi}_M$的优效渐近正态性．

根据优效渐近正态性的定义（参见 [4]，P.121）如果$\hat{\varphi}_M$具有优效渐近正态性，则除满足 (3.1) 外，还需满足

$$(X^{\tau}RX)^{-1} = \lim_{T\to\infty} T \cdot J(\varphi)^{-1} \tag{3.2}$$

其中$J(\varphi)$是信息阵．

假定满足 (1.1) – (1.4) 的 $x(t)$ 是正态过程，$\varepsilon(t)$ 是 iid 随机序列，那么由 [1](定理 2) 知，3.1 式成立．

由以下给出的例子可以说明 (1.12) 给出的这种估计$\hat{\varphi}_M$不具有优效渐近正态性．

例 设x_t是(1.1) – (1.4)的正态$ARMA(1,1)$序列：

$$x_t + 0.1x_{t-1} = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} \tag{3.3}$$

假定 ε_t是iid随机序列，且 $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

取$m=2$，由(3.3)可计算得自相关函数

$$p_1 = 0.3304 \qquad p_2 = -0.0330$$

于是

$$X = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03304 \\ -0.0330 \end{pmatrix}$$

利用(1.8)式可以计算得R的各元素

$$p_{1+1,1+1} = 1.4377 \qquad p_{1+2,1+1} = p_{1+1,1+2} = 0.8892$$

$$p_{1+2,1+2} = 1.4377$$

从而

$$R = \begin{pmatrix} 1.4377 & 0.8892 \\ 0.8892 & 1.4377 \end{pmatrix}$$

$$X^{\tau}RX = 0.1391 \tag{3.4}$$

另外，由 (3.3) 式知 $\varphi(Z)=1+0.1Z$，从而 $[\varphi(Z))]^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-0.1)^i Z^i \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{(i)}Z^i$，则 $\varphi^{(i)}=(-0.1)^i$，$i\geqslant 0$

由[5](*P*.321)知信息量$J(\varphi)$

$$\frac{1}{T}J(\varphi)=\sum_{u=1}^{\infty}\varphi^{(u-1)}\varphi^{(u-1)}+O\left(\frac{1}{T}\right)=1.0101+O\left(\frac{1}{T}\right) \tag{3.5}$$

由(3.4)和(3.5)，显然 $X^{\tau}RX<\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}J(\varphi)$，即

$$(X^{\tau}RX)^{-1}>\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}J(\varphi)\right)^{-1}=\lim_{T\to\infty}T\cdot J(\varphi)^{-1}$$

这就是说 (3.2) 式不成立，$\hat{\varphi}_M$ 的方差没有达到下界，因此，$\hat{\varphi}_m$ 不具有优效渐近正态性和渐近优效性.

虽然这种估计不具有渐近优效性和优效渐近正态性，但从 [1] 中的模拟结果表明这种估计与矩估计（高阶 *Yule－walker* 估计）和最小二乘估计相比较效果较好. 两个 $ARMA(1,1)$ 序列的模拟结果如下：

例1　$x_t-0.3x_{t-1}=\varepsilon_t-0.6\varepsilon_{t-1}$

	$\varphi_1=0.3$	$\theta_1=0.6$
矩估计	0.565	1.013
最小二乘估计	0.275	0.634
改进矩估计	0.311	0.681

例2　$x_t-0.8x_{t-1}=\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-1}$

	$\varphi_1=0.8$	$\theta_1=-0.5$
矩估计	0.697	－1.187
最小二乘估计	0.682	－1.229
改进矩估计	0.745	－1.054

参考文献

〔1〕 王慧敏　ARMA序列参数改进的矩估计, 数理统计与应用概率, 4(2), 1989, 199–212.

〔2〕 黄大威　平稳时间序列样本自相函数和自协方差函数的收敛速度, 科学通报, 32(4), 1987, 315–316.

〔3〕 常将学　刘维奇　AR模型识别及其参数的高阶Yule–walker估计, 应用数学学报, 12(2), 1989, 218–227.

〔4〕 陈兆国　时间序列及其谱分析, 科学出版社, 北京, 1988.

〔5〕 安鸿志　陈兆国　杜金观　潘一民　时间序列的分析与应用, 科学出版社, 北京, 1983.

The Strong Consistency of Modified Moment Method of Estimate of the Parameters of the ARMA Sequence

Pan Jinxiao Liu Weiqi

(Taiyuan Institute of Machinery) (Shanxi University)

Abstact

A modified moment method of estimate of the autoregressive paraneters of the ARMA sequence is given in (1), and the asymptotic normality of the esquence is proved. In this paper, we prove the strong consistency of the estimate, its efficiency asymptotic normality is discussed, too.