山西大学学报(自然科学版) 17(2): 143－147，1994
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

# 马尔可夫链二项模型矩估计的存在唯一性

张信东　刘维奇

(山西大学数学系)

**摘要**　本文研究{0,1}一状态马尔可夫链二项模型参数矩估计的存在性、唯一性和强相合性.

**关键词**　马尔可夫链二项模型，矩估计，多项式的根，强相合性

**中图法分类号**　O211.62

## 0　引言

为了拟合 n 重 Bernolli 试验(不要求独立性)中成功的次数发展了许多模型。如二项模型[1]、相关二项模型[2]、可加二项模型和可乘二项模型[3]。最近 Rudolfer[4] 讨论了马尔可夫链二项模型，且给出其分布与方差函数的性质。进一步，他还给出其参数的矩估计和 MLE，而且对 n=3 将此模型与其它模型进行了比较，其结果明显指出矩估计是比较优的。这就为实际计算提供了方便。然而 Rudolfer 没有讨论矩估计的存在性和唯一性，我们在一个注记[5]中指出其不足之处。本文将证明矩估计是存在且唯一的，并且还是强相合的。

设 $Z_1, Z_2, \cdots$，表示{0,1}一状态马尔可夫链，其转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

其中 $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$。令

$$X=\sum_{i=1}^{n} Z_i,\quad n>1。$$

可将 X 看成是 n 次试验中成功的次数，成功与失败的概率分别为 $P=\alpha/(\alpha+\beta)$、$q=\beta/(\alpha+\beta)$。假定 $Z_1\sim B(1,P)$，显然马尔可夫链$\{Z_i\}$是平稳的且其均值函数和自相关函数为

$$EZ_i=\alpha/(\alpha+\beta)\quad i=1,\ 2,\cdots \tag{0.1}$$

$$r_{ij}=(1-\alpha-\beta)^{|j-i|}\triangleq\delta^{|j-i|}\quad i,\ j=1,\ 2,\cdots \tag{0.2}$$

从文献[4]和[5]中提供的 X 的 p.d.f. 可以证明当取 $\alpha+\beta=1$ 时马尔可夫链二项模型即变为二项模型，所以可以认为它是二项模型的推广。

收稿日期：1993 06 05

## 1 预备引理

为了便于讨论引入两个引理(见文献[5],定理1和3)

**引理 1.1** X的均值和方差为

$$EX=n\alpha/(\alpha+\beta), \tag{1.1}$$

$$Var(x)=\frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^4}[\delta^{n+1}-n\delta^2+(n-1)\delta], \tag{1.2}$$

且注意到$|\delta|<1$。

为了拟合模型估计参数,取样本$(X_1,\cdots,X_m)$设其取值为$(k_1,\cdots,k_m)$,其中$0<k_i<n$, $1<i<m$。样本均值和样本方差分别记为

$$\bar{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i \quad S^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2\ 。 \tag{1.3}$$

**引理 1.2** 马尔可夫链二项模型的参数矩估计为

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{X}}{n}(1-\hat{\delta}),\ \hat{\beta}=(1-\frac{\bar{X}}{n})(1-\hat{\delta}), \tag{1.4}$$

其中$\hat{\delta}$是下述方程在$(-1,1)$内的一个解

$$\delta^{n+1}-(D+n)\delta^2+(n-1+2D)\delta-D=0, \tag{1.5}$$

且

$$D=\frac{n^2S^2}{2\bar{X}(n-\bar{X})}-\frac{n}{2}\ 。 \tag{1.6}$$

## 2 矩估计的存在性和唯一性

为了求得矩估计,关键在于求方程(1.5)在$(-1,1)$内的一个解。文献[4]仅假定方程(1.5)在$(-1,1)$内有解。下面我们证明方程(1.5)在$(-1,1)$内的解不仅存在而且唯一。

**引理 2.1** $-\frac{n}{2}<D<\frac{n(n-1)}{2}$ (2.1)

注意到

$$\bar{X}(n-\bar{X})-S^2=\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}nX_i-\sum_{i=1}^{m}X_i^2)>0\ ,$$

再由(1.6)式即得(2.1)。(2.1)式中左边等号成立的充分必要条件是$S=0$,右边等号成立的充分必要条件是$S^2=\bar{X}(n-\bar{X})$,亦即$S=0$,此情形是没有意义的。

**定理 2.1** 若$D>-[\frac{n}{2}]$,则方程(1.5)在$(-1,1)$内有解,因而矩估计(1.4)存在。

证明 注意到

$$f(\delta)\triangleq\delta^{n+1}-(D+n)\delta^2+(n-1+2D)\delta-D\triangleq(1-\delta)^2g(\delta), \tag{2.2}$$

其中

$$g(\delta)=\delta^{n-1}+2\delta^{n-2}+\cdots+(n-1)\delta-D。\tag{2.3}$$

因为 $g(1)=\frac{n(n-1)}{2}-D>0$, $g(-1)=-[\frac{n}{2}]-D<0$, 所以 $g(\delta)$ 在 $(-1,1)$ 内有根，从而 $f(\delta)$ 在 $(-1,1)$ 内有根，定理证毕。

根据引理 2.1 和定理 2.1，当 n 为偶数时矩估计存在，当 n 为奇数时，若 $D>-\frac{n-1}{2}$ 矩估计存在，而若 $-\frac{n}{2}<D<-\frac{n-1}{2}$ 矩估计不一定存在。

为证明矩估计的唯一性，下面引入 Buden－Fourier 定理（见[6]）。

**引理 2.2** (Buden－Fourier)　设 f(x) 是 n 次实系数多项式，S(c) 表示下述序列

$$\{f(c),\ f'(c),\cdots,f^{(n)}(c)\}$$

的变号数。若 $a<b$，且 $f(a)\cdot f(b)\neq 0$，则 f(x) 在 (a,b) 中的实根个数（重根按重数计算）表示为 $S_+(a)-S_-(b)$ 或比其少一个正偶数。

对 $f(c)\neq 0$，考察序列

$$f(c),\ f'(c),\ f''(c),\cdots,f^{(n-1)}(c),\ f^{(n)}(c),\tag{2.4}$$

若 $\prod_{i=1}^{n}f^{(i)}(c)\neq 0$，则用 S(c) 表示序列 (2.4) 的变号数，若 $\prod_{i=1}^{n}f^{(i)}(c)=0$，则序列 (2.4) 的变号数有两种表示方法：假定

$$f^{(k)}(c)=f^{(k+1)}(c)=\cdots=f^{(k+l-1)}(c)=0,\tag{2.5}$$

且 $f^{(k-1)}(c)\cdot f^{(k+l)}(c)\neq 0$，那么 (1) 将 $f^{(k)}(c),\cdots,f^{(k+l-1)}(c)$ 看成与 $f^{(k+l)}(c)$ 有相同的符号，此即在 (2.4) 中去掉这些零，然后计算其变号数，并用 $S_+(c)$ 表示；(2) 对 $0<i<l-1$，分别就 $l-i$ 的奇偶性视 $f^{(k+i)}(c)$ 与 $f^{(k+l)}(c)$ 符号相反或相同，此时 (2.4) 的变号数用 $S_-(c)$ 表示。

**引理 2.3**　多项式

$$g(\delta)=\delta^{n-1}+2\delta^{n-2}+\cdots+(n-1)\delta-D$$

当 $D>0$ 时在 $[0,1)$ 内只有一个实根；当 $D<0$ 时在 $[0,1)$ 内没有实根。

证明　因为

$$s(1)=0,\ s(0)=\begin{cases}1 & D>0\\ 0 & D<0\end{cases},$$

利用引理 2.2 即得结论。

当 $D=0$ 时

$$g(\delta)=\delta(\delta^{n-2}+2\delta^{n-3}+\cdots+n-1)\triangleq\delta\cdot g_1(\delta),$$

由于 $g_1(\delta)$ 是正系数多项式，在 $[0,1)$ 内无实根，因此 $g(\delta)$ 在 $[0,1)$ 内只有一个零根。

**引理 2.4**　多项式

$$f(\delta)=\delta^{n+1}-(D+n)\delta^2+(n+2D-1)\delta-D$$

当 $D>0$ 时在 $(-1,0)$ 内无实根；当 $-\frac{n-1}{2}<D<0$ 时在 $(-1,0)$ 内有唯一实根；当 $-\frac{n}{2}<D<-\frac{n-1}{2}$ 时若 n 为奇数在 $(-1,0)$ 内无实根或有两个根，若 n 为偶数在 $(-1,0)$ 内有

唯一实根。

证明 因为当 $D>0$

$$S(-1)=\begin{cases} n & n\text{奇} \\ n+1 & n\text{偶} \end{cases},\qquad S_-(0)=\begin{cases} n & n\text{奇} \\ n+1 & n\text{偶} \end{cases};$$

当 $-\frac{n-1}{2}<D<0$

$$S(-1)=\begin{cases} n & n\text{奇} \\ n+1 & n\text{偶} \end{cases},\qquad S_-(0)=\begin{cases} n-1 & n\text{奇} \\ n & n\text{偶} \end{cases};$$

当 $-\frac{n}{2}<D<-\frac{n-1}{2}$,

$$S(-1)=n+1,\qquad S_-(0)=\begin{cases} n-1 & n\text{奇} \\ n & n\text{偶} \end{cases}。$$

利用引理 2.2 即得结论。

当 $D=0$ 时,多项式

$$f_0(\delta)=\delta^{n+1}-n\delta^2+(n-1)\delta=\delta(\delta^n-n\delta+n-1)$$

总是正值,故它在 $(-1,0)$ 内无实根。

当 $D=-\frac{n-1}{2}$ 时,多项式 $f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)=\delta^{n+1}-\frac{n+1}{2}\delta+\frac{n-1}{2}$

若 n 为偶数 $S(-1)=n+1$, $S_-(0)=n$, 则 $f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根;若 n 为奇数

$$f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)=(\delta^2-1)^2(\delta^{n-3}+2\delta^{n-5}+\cdots+(\frac{n-3}{2})\delta^2+\frac{n-1}{2})$$

恒为正,故它在 $(-1,0)$ 内无实根。引理证毕。

**引理 2.5** 当 $D<-\frac{n-1}{2}$ 且 n 为奇数时 $f(\delta)$ 在 $(-1,0)$ 内没有实根。

证明 当 $D<-\frac{n-1}{2}$, $\delta\in(-1,0)$

$$f(\delta)-f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)=(-\frac{n-1}{2}-D)(\delta-1)^2>0。$$

从引理 2.4 的证明可见当 n 为奇数时 $f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)>0$, 因此 $f(\delta)>f_{-\frac{n-1}{2}}(\delta)>0$, 从而结论得证。

结合引理 2.2--2.4 得到

**定理 2.2** 当 n 为偶数时方程(1.5)在 $(-1,1)$ 内有唯一解;当 n 为奇数时若 $D<-\frac{n-1}{2}$ 方程(1.5)在 $(-1,1)$ 内无解,而若 $D>-\frac{n-1}{2}$ 有唯一解。

综合考虑定理 2.1 和定理 2.2 我们得到

**定理 2.3** 对 $-[\frac{n}{2}]<D<\frac{n(n-1)}{2}$, 矩估计(1.4)存在且唯一;对 $-\frac{n}{2}<D<-[\frac{n}{2}]$, 矩估计(1.4)不存在。

事实上在实际中满足 $D\in(-\frac{n}{2},-[\frac{n}{2}])$ 的样本是罕见的。

最后我们顺便指出矩估计(1.4)具有强相合性。根据柯尔莫哥洛夫强大数定律可得

$$\bar{X} \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \mu = n\alpha/(\alpha+\beta), \tag{2.6}$$

$$S^2 \xrightarrow[m\to\infty]{a.s.} \sigma^2 = \frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^4}(\delta^{n+1} - n\delta^2 + (n-1)\delta)。 \tag{2.7}$$

考虑到定理 2.2 可得

**定理 2.4**　由(1.4)式确定的马尔可夫链二项模型的参数的矩估计是强相合的，即

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \xrightarrow[m\to\infty]{a.s} (\alpha, \beta) \tag{2.8}$$

在本文完成过程中得到了山西大学数学系王彩云老师的热心帮助，谨致谢意。

## 参 考 文 献


1　Skellam J G. A probability distribution derived from the binomial distribution by regarding the probability of success as variable between the sets of trials, J. R. Statist. Soc. B, 1948, 10: 257～267

2　Kupper L L, Haseman J L. The use of a correlated binomial model for the analysis of certain toxicological experiments. Biometrics, 1978, 34: 69～76

3　Altham P M E. Two generalization of the binomial distribution. Appl. Statist, 1978, 27: 162～167

4　Rodolfer S M. A Markov chain model of extrabinomial variation, Biometrika, 1990, 77(2): 255～264

5　张信东，刘维奇。马尔可夫链二项模型的一个注记。山西大学学报(自然科学版)，1993, 16(1): 9～13

6　Jacobson N. Basic Algebra I. San Francisco, W. H., Freeman & Company, 299


# THE EXISTENCE AND THE UNIQUENESS OF THE MOMENT ESTIMATION OF THE MARKOV CHAIN BINOMIAL MODEL

Zhang Xindong　Liu Weiqi

*(Department of Mathematics, Shanxi University)*

**Abstract**

This paper studies the existence, the uniqueness and the strong consistency of the moment estimates on the parameters of the $\{0,1\}$-state Markov chain binomial model.

**Key words**　Markov chain binomial model, moment estimation, roots of a polynomial, strong consistency

**Classification Code of Chinese Literatures O211.62**