第 17 卷　第 4 期
2000 年 11 月
工　程　数　学　学　报
JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS
Vol. 17 No. 4
Nov. 2000

文章编号: 1005-3085(2000) 04-0103-04

有约束的混合系数线性模型参数的估计*

刘维奇[1]，　王　峰[2]

(1-山西大学数学系, 太原 030006; 2-西安交通大学理学院, 西安 710049)

摘　要: 提供了在连续测量数据的背景情况下, 给出了线性模型:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{a} + \boldsymbol{Y}_i\beta_i + \epsilon_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ \beta_i \overset{i.i.d.}{\sim} (b, \sum) & \epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} (0, \sigma^2\boldsymbol{I}_{n_i}) \end{cases}$$

具有约束 $H(a', b')' = 0$ 时, 固定系数 a 和随机系数 β 的一种估计, 并讨论了该估计的性质.

关键词: 线性模型; 参数估计

分类号: AMS(1991) 62J05　　中图分类号: O212.4　　文献标识码: A

1　引　言

混合系数线性模型[1]:

$$\boldsymbol{Z}(t) = [\boldsymbol{x}(t)]'\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{y}(t)]'\beta \tag{1}$$

其中　$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_p(t)]'$　$\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_q(t)]'$

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_p(t), y_1(t), y_2(t), \cdots, y_q(t)$ 均为 t 的已知函数, a 是 p 维固定系数向量, β 是 q 维随机系数向量, 且 $E(\beta) = b, V(\beta) = \sum$.

现对 m 个样品分别在 $t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{in_i}(i = 1, 2, \cdots, m)$ 时刻测得以下数据

$$z_{ij} = [x(t_{ij})]'a + [y(t_{ij})]'\beta_i + \epsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n_i,\ n_i > p + q \tag{2}$$

这里 β_i 和 ϵ_{ij} 分别是每个样品的随机系数和每次测量的误差, 并且 $\beta_i \overset{i.i.d.}{\sim} (b, \sum)$　$\epsilon_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} (0, \sigma^2)$, β_i 与 ϵ_{ij} 独立, 若记

$$\boldsymbol{Z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \cdots, z_{in_i})' \quad \epsilon = (\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}, \cdots, \epsilon_{in_i})'$$

$$\boldsymbol{X}_i = \begin{bmatrix} x_1(t_{i1}) & \cdots & x_p(t_{i1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_{in_i}) & \cdots & x_p(t_{in_i}) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Y}_i = \begin{bmatrix} y_1(t_{il}) & \cdots & y_q(t_{i1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(t_{in_i}) & \cdots & y_q(t_{in_i}) \end{bmatrix}$$

则

* 收稿日期: 1998-05-25.　作者简介: 刘维奇(1963 年 9 月生), 男, 硕士, 副教授.

$$\begin{cases} Z_i = X_i a + Y_i \beta_i + \epsilon_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ \beta_i \overset{i.i.d.}{\sim} (b, \sum) & \epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} (0, \sigma^2 I_{n_i}) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $p > 0, q > 0$.

再引入记号 $C_i = (X_i, Y_i), \theta = (a', b')', e_i = Y_i(\beta_i - b) + \epsilon_i$

则模型(3) 可写为

$$\begin{cases} Z_i = C_i\theta + e_i & i = 1, 2, \cdots, m \\ e_i \overset{i.i.d.}{\sim} (0, Y_i \sum Y_i' + \sigma^2 I_{n_i}) \end{cases} \tag{4}$$

对于完全随机系数的形式, 文[2～4] 等对其参数估计以及大样本性质作了一些研究, 文[1] 给出了混合系数的线性模型(4) 中 $\mathrm{rk}(X_i) = p, \mathrm{rk}(Y_i) = q, \mathrm{rk}(X_i, Y_i) = p + q$ 时参数的一种估计, 这里我们讨论该模型在约束条件

$$H\theta = 0 \tag{5}$$

下, 参数 θ 的估计, 其中 H 是 $s \times (p + q)$ 阶矩阵.

2 参数向量 a, b 的估计

引理 2.1 (高斯-马尔可夫定理) 若 $a'\theta$ 在约束 $H\theta = 0$ 下可估, 则它存在唯一的方差最小的线性无偏估计 $a'\hat{\theta}_H$, 其中 $\hat{\theta}_H$ 为 θ 的任一个在约束 $H\theta = 0$ 下的 LSE.

证明参见文[5: 77, 定理 3.11]

为了方便起见, 引入以下记号:

$$M = \mathrm{diag}(Y_1Y_1' + I_{n_1}, Y_2Y_2' + I_{n_2}, \cdots, Y_mY_m' + I_{n_m}) \quad s = \sum_{i=1}^{m} n_i \tag{6}$$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

对模型(4), 可得以下结论:

定理 2.1 若 θ 在约束(5) 下可估, $\sum = \sigma^2 I_q$, 且至少存在一个 $i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得 C_i 列满秩, 则 θ 的最小方差线性无偏估计为

$$\hat{\theta}_H = U^{-1}[I_{p+q} - P_{(HU^{-1})'}]U'^{-1}C'M^{-1}Z \tag{8}$$

其中 P_A 是向量空间 $\mu(A)$ 的正交投影矩阵, U 是满足 $C'M^{-1}C = U'U$ 的可逆矩阵.

证明 在模型(4) 中, 考虑到 $V(Z_i) = Y_i \sum Y_i' + \sigma^2 I_{n_i}$, 当正定矩阵 $\sum = \sigma^2 I_q$ 时, $V(Z_i) = \sigma^2(Y_iY_i' + I_{n_i})$. 由(6), (7) 式引入的记号, 模型(4) 可写为

$$\begin{cases} Z = C\theta + e \\ \mathrm{cov}\, e = \sigma^2 M \end{cases} \tag{9}$$

则由矩阵理论 $M > 0$, 且存在一可逆矩阵 L, 使得 $M = L'L$ 成立, 令

$$\tilde{Z} = (L^{-1})'Z \tag{10}$$

则模型(9) 可写为

$$\begin{cases} \tilde{Z} = \tilde{C}\theta + \tilde{e} \\ \mathrm{cov}\, \tilde{e} = \sigma^2 I_s \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$\tilde{C} = (L^{-1})'C \qquad \tilde{e} = (L^{-1})'e \tag{12}$$

于是问题转化为讨论线性模型(11) 在约束(5) 的条件下θ的估计, 而θ的最小二乘估计$\hat{\theta}_H$应满足

$$\|\tilde{Z} - \tilde{C}\hat{\theta}_H\|^2 = \min_{H\theta=0}\|\tilde{Z} - \tilde{C}\theta\|$$

考虑目标函数

$$\begin{aligned} f &= (\theta,\lambda) = \|\tilde{Z} - \tilde{C}\theta\|^2 + 2\lambda'H\theta \\ &= \tilde{Z}'\tilde{Z} - 2\theta'\tilde{C}'\tilde{Z} + \theta'\tilde{C}'\tilde{C}\theta + 2\lambda'H\theta \end{aligned}$$

两边分别对θ和λ求偏导数, 并令其等于 0 得带约束的正规方程组

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}'\tilde{C} & H' \\ H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}'\tilde{Z} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

由于至少存在一个$i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得C_i列满秩, 则C列满秩, 根据(12) 式知$\tilde{C}$列满秩, 从而$\tilde{C}'\tilde{C}$可逆, 选取广义逆

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}'\tilde{C} & H' \\ H & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} A & * \\ B & * \end{pmatrix}$$

其中

$$A = (\tilde{C}'\tilde{C})^{-1} - (\tilde{C}'\tilde{C})^{-1}H'(H(\tilde{C}'\tilde{C})^{-1}H')^{-}H(\tilde{C}'\tilde{C})^{-1} \tag{14}$$

$$B = (H(\tilde{C}'\tilde{C})^{-1}H')^{-}H\tilde{C}'\tilde{C}^{-1} \tag{15}$$

$*$ 所在的部分这里不做考虑

从而可得方程组(13) 的解:

$$\hat{\theta}_H = A\tilde{C}'\tilde{Z} \qquad \hat{\lambda} = B\tilde{C}'\tilde{Z} \tag{16}$$

将式(10), (12) 及(15) 式代入上式$\hat{\theta}_H$中, 并记U是满足$C'M^{-1}C = U'U$的$p+q$可逆矩阵, 由正交投影矩阵的性质得:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_H &= U^{-1}[I_{p+q} - U'^{-1}H'(HU^{-1}U'^{-1}H')^{-}HU^{-1}]U'^{-1}C'MZ \\ &= U^{-1}[I_{p+q} - P_{(HU^{-1})'}]U'^{-1}C'MZ \end{aligned}$$

其中$(HU^{-1}U'^{-1}H')^{-}$表示矩阵$HU^{-1}U'^{-1}H'$的广义逆, 熟知, $P_{(HU^{-1})'}$与广义逆的选取无关, 从而此结论不受广义逆选取不同的影响。由引理 2.1, 若θ在约束$H\theta = 0$下可估, 则在约束$H\theta = 0$下的最小二乘估计$\hat{\theta}_H$是其唯一的最小方差线性无偏估计, 从而定理得证.

估计量$\hat{\theta}_H$的方差

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}_H) &= V(A\tilde{C}'\tilde{Z}) = A\tilde{C}'V(\tilde{Z})\tilde{C}A' \\ &= \sigma^2 A\tilde{C}'\tilde{C}A' = \sigma^2 A \end{aligned} \tag{17}$$

其中最后一个等号用到(14) 式.

定理 2.2　在定理 2.1 的条件下, 有

$$\hat{a} = (X'QX)^{-1}(X'Q + TH'BC'M^{-1})Z \tag{18}$$

$$\hat{b} = (Y'PY)^{-1}(Y'P + SH'BC'M^{-1})Z \tag{19}$$

其中

$$P = M^{-1} - M^{-1}X(X'M^{-1}X)^{-1}X'M^{-1} \quad S = [-I_p, X'M^{-1}Y(Y'M^{-1}Y)^{-1}]$$

$$Q = M^{-1} - M^{-1}Y(Y'M^{-1}Y)^{-1}Y'M^{-1} \quad T = [-I_q, Y'M^{-1}X(X'M^{-1}X)^{-1}]$$

证明　将(16) 式中$\hat{\lambda} = B\tilde{C}'\tilde{Z}$代入有约束的正规方程组(13) 式, 得

$$\tilde{C}'\tilde{C}\theta + H'\lambda = \tilde{C}'\tilde{Z}$$
$$\tilde{C}M^{-1}C\theta = C'M^{-1}Z - H'\lambda$$

将 H 分块, $H = (H_1, H_2)$, 其中 H_1 为 $s \times p$ 矩阵, H_2 为 $s \times q$ 矩阵, 则上式可写为方程组:

$$\begin{cases} X'M^{-1}Xa + X'M^{-1}Yb = X'M^{-1}Z - H_1'\lambda \\ Y'M^{-1}Xa + Y'M^{-1}Yb = Y'M^{-1}Z - H_2'\lambda \end{cases} \tag{20}$$

解方程组可得(18),(19) 式成立

由矩阵知识可得 $\hat{a}$ 的方差

$$\begin{aligned} V(\hat{a}) &= \sigma^2(X'QX)^{-1}(X'Q + THB'C'M^{-1})M(Q'X + M^{-1}C'B'HT')(X'QX)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'QX)^{-1} - \sigma^2(X'QX)^{-1}TH'[H(C'M^{-1}C)^{-1}H'] - HT'(X'QX)^{-1} \end{aligned}$$

同理可得

$$V(\hat{b}) = \sigma^2(Y'PY)^{-1} - \sigma^2(Y'PY)^{-1}SH'[H(C'M^{-1}C)^{-1}H']^{-} HS'(Y'PY)^{-1}$$

若(X_i, Y_i) 均不是列满秩的, 则 $\tilde{C}$ 可能不列满秩, 式(14),(15) 可能不存在, 此时 A, B 为任选的一广义逆中相应位置的元素, 从而也可类似得到相应的结果, 这里不再赘述.

3 σ^2 的估计

引理 3.1 在 θ 具有约束 $H\theta = 0$ 的线性模型$(y, C\theta, \sigma^2 I_n)$ 中, σ^2 的一个无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - q}\| y - C\hat{\theta}_H \|^2$$

其中 $\hat{\theta}_H$ 是 θ 在约束 $H\theta = 0$ 下的 LSE, $q = \mathrm{rk}(C' \vert H') - \mathrm{rk}(H')$

证明参见文[5: 83 定理 3.14]

定理 3.1 在定理 2.1 的条件下, σ^2 有无偏估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{s - l}\| \tilde{Z} - \tilde{C}\hat{\theta}_H \|^2 = \frac{Z'(M^{-1} - M^{-1}CAC'M^{-1})Z}{s - l}$$

这里 $l = \mathrm{rk}(C' \vert H') - \mathrm{rk}(H')$

由引理 3.1 及模型(10) 即可得结论, 这里不再赘述。

参考文献:

[1] 庄东辰, 茆诗松. 混合系数线性模型的参数估计[J]. 应用概率统计. 12(1): 81- 87

[2] Rao C R. The theory of least when the parameter are stochastic and its application to the analysis of growth curves[J]. Biometrika 1965; 52: 447- 458

[3] Swamy P A V B. Statistical Inference in Random Coefficent Regression Models[J]. Springer-Verlage. New York. 1973

[4] Johansen S. Asumptotic inference on random coefficient regression models[J]. Scand J Statist. 1982; 9: 201- 207

[5] 刘朝荣, 黄养新. 线性模型及其统计推断[M]. 武汉: 武汉工业大学出版社. 1992

(下转 138 页)

参考文献:

[1] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991; 12

[2] Louis Comtel. Advanced Conbinatorics[M]. France: D Reidel Publishing Conpany, 1974

[3] 骆汝九. Catalan 数的一个递归关系[J]. 苏州大学学报, 2000; 16(2)

An Extension of the Catalan Problem

LUO Ru-jiu

(Lianyungang Vocational College, Lianyungang 222001)

Abstract: An expression of the number $a_{n,p}$ of p -bracketings and recurrence relation for $a_{n,p}$ are obtained in this paper. Those are extensions of the Catalun problem results.

(上接 106 页)

An Estimate of Parameters in the Linear Model Mixed Coefficient with Constraint

LIU Wei-qi[1], WANG Feng[2]

(1-Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan 030006;

2-Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: In the case of continually measured data, the paper gives out an estimate of fixed coefficient a and random coefficient β when there is constrain $H(a', b')' = 0$ in the linear model:

$$\begin{cases} Z_i = X_i a + Y_i \beta_i + \epsilon_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \beta_i \overset{i.i.d.}{\sim} (b, \sum) \quad \epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} (0, \sigma^2 I_{n_i}) \end{cases}$$

and discusses the nature of this estimate.