* 山西大学学报(自然科学版) 26(2): 117～121, 2003
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

文章编号: 0253-2395(2003)02-0117-05

对一个汇率模型的参数的极大似然估计

刘维奇, 孟银凤

(山西大学 数学系, 山西 太原 030006)

摘　要: 首先通过 Cheung 和 Yeung 的汇率模型引出肖庆宪和茆诗松的汇率模型, 之后, 我们主要是利用微积分, 随机过程等基本知识对肖庆宪和茆诗松的模型作了详细的推导, 进而导出一个便于操作的结果。而且为了便于今后的实践应用, 还利用极大似然估计的方法对模型中的参数进行了统计推断.

关键词: 随机过程; 汇率; 均值回复
中图分类号: O212.1　　**文献标识码**: A

肖庆宪和茆诗松的汇率模型是在 Cheung 和 Yeung 的汇率模型的基础上进行了改进, Cheung 和 Yeung 的汇率模型是:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)} = R(t)\mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}R(t) = \{-\alpha R(t) - \beta[\ln P(t) - \ln P^*]\}\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中, $P(t)$ 表示实际汇率, P^* 表示相对购买力(purchasing power parity, 即外币与本国货币的购买力之比), $W(t)$ 是布朗运动, α, β, σ 均为正数, $R(t)$ 为投资者所获的超值回报率(premium rates of return), 其中

$$R(t) = Q(t) - (r_f - r), \tag{2}$$

这里, $Q(t)$ 为汇率的实际变化率, $(r_f - r)$ 为外币对本国货币汇率的变化率. 假定在一段时间内, 某种外币和本国货币的利率均为常数, 则本国货币兑换外币的投资者应获的收益率为 $(r_f - r)$ 即

$$\mathrm{d}\left(\frac{B}{H}\right) \Big/ \left(\frac{B}{H}\right) = (r_f - r)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

其中 $B(t)$ 为某外币的结算价格(accounting price), $H(t)$ 为本国货币的结算价格. 在模型(1)中, Cheung 和 Yeung 综合考虑了利率及购买力对汇率的影响[1]. 同时, 为了搞清楚这个汇率模型, Cheung 和 Yeung 还给出了 $P(t)$ 的转移密度函数

$$\theta(P, t; P_0) = \frac{1}{P_0 \sigma \sqrt{2\pi F(t)}} e^{-\frac{[\ln P(t) - \mu(t)]^2}{2\sigma^2 F(t)}}, \tag{4}$$

其中

$$\mu(t) = \ln P_0 + \ln K(t) - \sigma^2 F(t)/2, \tag{5}$$

$$F(t) = -\frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha\beta(\alpha^2 - 4\beta)}\left[2\alpha^2 \sinh\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}t + \alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\sinh\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\,t + (\alpha^2 - 4\beta)\right] + \frac{1}{2\alpha\beta}, \tag{6}$$

$$K(t) = EP(t)/P_0. \tag{7}$$

我们知道, 要将模型(1)运用于外汇业务中去, 必须对其中的参数进行统计推断, 从 $\theta(P, t; P_0)$ 的表达式中可以看出, 这是非常困难的. 此外, 模型(1)将 $R(t)$ 做为研究对象, 在金融实践中是难以观察的.

鉴于此, 在本文中, 我们引入了肖庆宪和茆诗松提出的汇率模型. 他们指出: 每种货币都有其内在价值(intrinsic value), 这可以通过它的购买力反映出来. 如果一种货币的汇率高(低)于其相对购买力 P^*, 那么 $P(t)$ 呈下降(上升)趋势. 这种现象称为均值回复(reversion to the mean)[2]. 另一方面, 受利益的驱动, 当 $P(t)$ 高于名义汇率(即 $P(t) > \dfrac{B(t)}{H(t)} = e^{(r_f - r)t}$ 或 $\ln P(t) > (r_f$

* **收稿日期**: 2002-07-08
基金项目: 山西回国留学人员科研基金
作者简介: 刘维奇(1963-), 男, 山西忻州人, 硕士, 山西大学数学系副教授, 主要从事概率论与数理统计研究

$-r)t)$时, 投资者将抛售外币, 从而使 $P(t)$ 呈下降趋势; 反之, $P(t)$ 呈上升趋势. 此外, 汇率的波动还受其他随机因素的影响. 基于上述考虑, 肖庆宪和茆诗松给出以下汇率模型[3]

$$d\ln P(t) = \{-\alpha(\ln P(t) - \ln P^*) - \beta[\ln P(t) - (r_f - r)t]\}dt + \sigma dW(t) \tag{8}$$

其中, α, β, σ 均为正数, $W(t)$ 为布朗运动.

1 对肖庆宪和茆诗松的汇率模型的探讨

引理 1 (一类特殊的线性方程) 设 σ, b 分别为 $d\times r, d\times d$ 常矩阵, Y 为 r 维连续 $\mathcal{F}_t$ 半鞅, A 为一维有限变差 $\mathcal{F}_t$ 适应过程, 则方程 $dX_t = \sigma dY_t + bX_t dA_t$ 的解为

$$X_t = e^{bA_t}(X_0 + \int e^{-bA_s} \circ \sigma dY_s), \tag{9}$$

这里"$\circ$"代表可选过程[4~5].

证明 两边"$\circ$"乘以 e^{-bA_t}, 我们就能得到 $d(e^{-bA_t}X_t) = e^{-bA_t}\circ(\sigma dY_t)$, 于是(9)成立, 证毕.

特别地, 如果 Y 是 $\mathcal{F}$-Brown 运动 B, $A_t = t$, 而且矩阵 b 的特征值均有负实数, 那么对应的解 X 称为 Ornstein-Ulenbeck 过程.

定义 1 设指标集 T 是 R, Z 或它们与某个区间的交, $\xi = \{\xi(t,\cdot); t\in T\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathfrak{R}, P)$ 上的实值(或复值)随机过程. 我们称 ξ 为一个独立增量过程, 如对任意的 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T$, $\xi(t_0,\cdot)$, $\xi(t_1,\cdot) - \xi(t_0,\cdot)$, $\cdots$, $\xi(t_n,\cdot) - \xi(t_{n-1},\cdot)$ 都相互独立. 又若还对 $t < t+h \in T$, 有 $\xi(t+h,\cdot) - \xi(t,\cdot)$ 的分布与 t 无关, 则称 ξ 是一个时齐的独立增量过程.

定义 2 概率空间 $(\Omega, \mathfrak{R}, P)$ 上的连续随机过程 $B = (B_t)_{0<t<\infty}$ 称为 d 维 Brown 运动, 如果 $B_0 = 0$, B_t 是 $(\Omega, \mathfrak{R}, P)$ 上时齐的独立增量过程, $E(B_t - B_s)(B_u - B_v) = 0$ $(\forall v < u \le s < t)$. 而且 $B_t - B_s$ 遵从数学期望为 0, 方差矩阵为 $(t-s)I$ (I 为单位矩阵) 的 Guass 分布(记成 $B_t - B_s \sim N(0, (t-s)I)$).

引理 2 对于 Brown 运动 $W(t)$, 有 $\int e^{as}dW(s) \sim N\left(0, \int e^{2as}ds\right)$.

定理 1 $\ln P(t) \sim N(\mu(t), F(t))$, 这里

$$\mu(t) = -bt - c + e^{-at}(\ln P(0) + c), F(t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at});$$

$$a = \alpha + \beta, b = -\frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}, c = -\frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(r_f - r)}{(\alpha+\beta)^2}.$$

证明 模型(8)可表示为

$$\begin{aligned} d\ln P(t) &= [-(\alpha+\beta)\ln P(t) + \beta(r_f - r)t + \alpha\ln P^*]dt + \sigma dW(t) \\ &= [-(\alpha+\beta)(\ln P(t) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}t - \frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta})]dt + \sigma dW(t), \end{aligned}$$

$$d(\ln P(t) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}t) = [-(\alpha+\beta)(\ln P(t) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}t - \frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta}) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}]dt + \sigma dW(t),$$

$$\begin{aligned} &d[\ln P(t) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}t - \frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(r_f - r)}{(\alpha+\beta)^2}] \\ &= \{-(\alpha+\beta)[\ln P(t) - \frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}t - \frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(r_f - r)}{(\alpha+\beta)^2}]\}dt + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

令 $a = \alpha+\beta$, $b = -\frac{\beta(r_f - r)}{\alpha+\beta}$, $c = -\frac{\alpha\ln P^*}{\alpha+\beta} + \frac{\beta(r_f - r)}{(\alpha+\beta)^2}$, 则有

$$d(\ln P(t) + bt + c) = -a(\ln P(t) + bt + c)dt + \sigma dW(t) \tag{10}$$

由引理 1, 上述方程的解为

$$\ln P(t) = -bt - c + e^{-at}\left(\ln P(0) + c + \sigma\int e^{as}dW(s)\right) \tag{11}$$

再由引理 2 有

$$E\ln P(t) = -bt - c + e^{-at}(\ln P(0) + c) = \mu(t), \tag{12}$$

$$Var\ln P(t) = \sigma^2 e^{-2at}\int e^{2as}ds = F(t).$$

证毕

2 参数估计

定义 3 如果随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 对于参数集 T 中的任意 $n+1$ 个数: $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ 和状态空间 S 中的任意 n 个状

态: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及任意的实数 x, 具有无后效性, 即条件分布

$$P\{X(t_{n-1}) \le x | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_{n+1}) \le x | X(t_n) = x_n\}$$

恒成立, 则称此过程为马尔可夫过程

定义 4 如果马氏链的转移概率 $P_{ij}(t_n)$ 不依赖于 t_n, 即对任意的非负整数 k, 有

$$P\{X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i\} = P\{X(t_{k+1}) = j | X(t_k) = i\} = P_{ij},$$

则称此马氏链具有齐次性(时齐性), 是齐次马氏链

定义 5 设随机过程 $\{\xi_t, t > 0\}$ 的任意有限个时刻所对应的随机向量 $(\xi_{t_1}, \cdots, \xi_{t_n})$ 都有正的联合分布密函数, 而条件分布密度满足对任意的 $t_1 < \cdots < t_n$ 及 $t \ge 0$ 都有

$$P_{\xi_{tn+t}}\{y | \xi_{t_1} = x_1, \cdots, \xi_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \xi_{t_n} = x\} = P_{\xi_{t_{n+t}}}\{y | \xi_{t_n} = x\},$$

则 $\{\xi_t; t \ge 0\}$ 为实值时齐的马氏过程

定理 2 设 $\{x_t, t \ge 0\}$ 为 wiener 过程 (Brown 运动), 其中参数为 σ, a, 设随机过程 $U_t = e^{-at}x(e^{2at}), t \ge 0$ 为 Ornstein-Uhlenbeck 过程 从而 $\{U_t\}$ 既是正态过程也是马氏过程, 并且 $\{U_t\}$ 的转移密度函数为

$$q(t, y; s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y - e^{-a(t-s)}x)^2}{2F(t-s)}\right], s < t, \tag{13}$$

其中 $F(s-t) = \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(t-s)}\right]$.

由(2 1)及随机分析理论[4]可知

$$y(t) \triangleq \ln P(t) + bt + c \tag{14}$$

为时齐的马氏过程, 因而对任意的 $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = T, y(t_1), y(t_2), \cdots, y(t_n)$ 的联合密度为

$$f(y_{t_1}, y_{t_2}, \cdots, y_{t_n}) = \prod_{k=1}^n f(y_{t_k} / y_{t_1}, y_{t_2}, \cdots, y_{t_{k-1}}) = \prod_{k=1}^n f(y_{t_k} / y_{t_{k-1}}).$$

由定理 1, $\ln P(t) \sim N(\mu(t), F(t))$, 所以 $y(t) \sim N(e^{-at}(\ln P(0) + c), F(t))$. 再结合定理 2, 于是 $\ln P(t_1), \ln P(t_2), \cdots, \ln P(t_n)$ 的联合密度为

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, \cdots, z_n) &= f(z_1 + bt_1 + c, z_2 + bt_2 + c, \cdots, z_n + bt_n + c) \\ &= \prod_{k=1}^n f(z_k + bt_k + c / z_{k-1} + bt_{k-1} + c) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi F(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{[z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - e^{-a(t_k - t_{k-1})}(z_{k-1} + c)]^2}{2F(t_k - t_{k-1})}\right). \end{aligned}$$

根据定理 1 中 $F(t)$ 的表达式可知 $F(t_k - t_{k-1}) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})})$ 并代入上式, 则有

$$g(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}]}} \exp\left(-\frac{[z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - e^{-a(t_k - t_{k-1})}(z_{k-1} + c)]^2}{\frac{\sigma^2}{a}[1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}]}\right).$$

因此

$$\begin{aligned} &\ln g(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{a}[1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}]}} - \sum_{k=1}^n \frac{[z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - e^{-a(t_k - t_{k-1})}(z_{k-1} + c)]^2}{\frac{\sigma^2}{a}[1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}]} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \ln\left[\frac{\pi\sigma^2}{a}(1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})})\right] - \frac{a}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n \frac{[z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - e^{-a(t_k - t_{k-1})}(z_{k-1} + c)]^2}{1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{n\ln\pi + n\ln\sigma^2 - n\ln a + \sum_{k=1}^n \ln[1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}]\right\} - \frac{a}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n \frac{[z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - e^{-a(t_k - t_{k-1})}(z_{k-1} + c)]^2}{1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})}}. \end{aligned}$$

取 $1 - e^{-2a(t_k - t_{k-1})} = 2a(t_k - t_{k-1}), e^{-a(t_k - t_{k-1})} = 1 - a(t_k - t_{k-1})$, 记 $\ln g(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \ln g$, 则

$$\begin{aligned} \ln g &= -\frac{1}{2}\left[n\ln\pi + n\ln\sigma^2 - n\ln a + \sum_{k=1}^n \ln 2a(t_k - t_{k-1})\right] \\ &\quad - \frac{a}{\sigma^2}\sum_{k=1}^n \frac{\{z_k + b(t_k - t_{k-1}) + c - [1 - a(t_k - t_{k-1})](z_{k-1} + c)\}^2}{2a(t_k - t_{k-1})} \\ &= -\frac{1}{2}\left[n\ln\pi + n\ln\sigma^2 + n\ln 2 + \sum_{k=1}^n \ln(t_k - t_{k-1})\right] \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n \frac{[(z_k - z_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + b(t_k - t_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})c]^2}{t_k - t_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial b} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2[(z_k - z_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + b(t_k - t_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})c](t_k - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = 0 \tag{15}$$

即 $\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + b\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) + ac\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = 0$. 也即

$$(z_n - z_0) + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + bT + acT = 0. \tag{16}$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial a} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2[(z_k - z_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + b(t_k - t_{k-1}) + a(t_k - t_{k-1})c](t_k - t_{k-1})(z_{k-1} + c)}{t_k - t_{k-1}} = 0. \tag{17}$$

即 $\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})(z_{k-1} + c) + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}(z_{k-1} + c) + b\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})(z_{k-1} + c) + ac\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})(z_{k-1} + c) = 0$,

也即

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} + (z_n - z_0)c + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2 + 2ac\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}$$
$$+ b\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + bcT + ac^2T = 0. \tag{18}$$

由(16)式的两边均乘以 c 可得

$$bcT + ac^2T = -(z_n - z_0)c - ac\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}. \tag{19}$$

将(19)代入(18)可得

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1}^2 + (ac + b)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} = 0. \tag{20}$$

又由 a, b, c 的关系 $ac + b = -\alpha\ln P^*$, 因此(20)式可化为

$$\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2 - \alpha\ln P^*\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} = 0. \tag{21}$$

则(16)式可化为

$$z_n - z_0 + a\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} + \alpha T\ln P^* = 0. \tag{22}$$

(21)和(22)联立可得

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2 & -\ln P^*\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} \\ \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} & -T\ln P^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} \\ -z_n + z_0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2 & -\ln P^*\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} \\ \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} & -T\ln P^* \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} \\ -z_n + z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -T\ln P^* & \ln P^*\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} \\ -\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1} & \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} \\ -z_n + z_0 \end{pmatrix}}{\ln P^*\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}\right]^2 - T\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2\right\}}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{T\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} - (z_n - z_0)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}}{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}\right]^2 + T\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2} \\ \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}\sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})z_{k-1} - (z_n - z_0)\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2}{\ln P^*\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}\right]^2 - T\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})z_{k-1}^2\right\}} \end{pmatrix}$$

由上可知

$$\alpha=\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})z_{k-1}-(z_n-z_0)\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}^2}{\ln P^*\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}\right]^2-T\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}^2\right\}},\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\beta= a-\alpha\frac{T\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})z_{k-1}-(z_n-z_0)\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}}{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}\right]^2-T\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}^2}\\-\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})z_{k-1}-(z_n-z_0)\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}^2}{\ln P^*\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}\right]^2-T\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})z_{k-1}^2\right\}},\end{aligned}\tag{25}$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{[(z_k-z_{k-1})+a(t_k-t_{k-1})z_{k-1}+b(t_k-t_{k-1})+a(t_k-t_{k-1})c]^2}{t_k-t_{k-1}}=0.\tag{26}$$

于是

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{[(z_k-z_{k-1})+a(t_k-t_{k-1})z_{k-1}+b(t_k-t_{k-1})+a(t_k-t_{k-1})c]^2}{t_k-t_{k-1}}.\tag{27}$$

根据 α, β 与 a, b, c 的关系, 可求出 b, c 的表达式, 然后将 a, b, c 的表达式代入(27)式即可求得 σ^2 的值.

这样, 通过极大似然估计的方法把所有的参数都估计出来了, 也就基本解决了肖庆宪和茆诗松给出的汇率模型的定价问题.

参考文献:

[1] CHEUNG M T, YEUNG D A. Non random walk theory of exchange rate dynamic with applications to option pricing [J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 1994, **12**: 141-157.

[2] PARKS A L H, SAVVIDES A. Purchasing power parity in the long run and structural breaks: evidence from real sterling exchange rates[J]. *Applied Financal Economics*, 1999, **9**: 117-127.

[3] 肖庆宪, 茆诗松. 汇率与期权定价(*Exchange Rate Model and Option Pricing*)[J]. 应用概率统计, 2002, **18**(1): 67-70.

[4] 钱敏平, 龚光鲁. 应用随机过程[M]. 北京: 北京大学出版社, 1988.

[5] 李漳南, 吴荣. 随机过程教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.

Parameter Estimate of an Exchange Rate Model

LIU Wei-qi, MENG Yin-feng

(*Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: The relation of cause and effect of the pricing model of exchange rate of Xiao Qingxian and Mao Shisong is Studied in detail, and its parameter is also statistically infered by means of maximum likelihood estimate.

Key words: random process; exchange rate; reversion to the mean