2004年第25卷第2期 华北工学院学报 Vol.25 No.2 2004
(总第94期) JOURNAL OF NORTH CHINA INSTITUTE OF TECHNOLOGY (Sum No.94)

文章编号: 1006-5431(2004)02-0092-02

MAX-MA(1) 过程的参数估计*

李冬梅, 刘维奇

(山西大学 数学系, 山西 太原 030006)

摘 要: 文章给出了一阶极大值滑动平均过程参数 θ 的一种估计 $\hat{\theta}$, 并证明了对充分大的 n, $\hat{\theta}$ 以概率 1 收敛于精确参数值 θ, 从而证明了这种估计是强相合的.

关键词: 极大值滑动平均过程; 无限方差; 参数估计; 相合性

中图分类号: O211 文献标识码: A

Parameter Estimation for First-order MAX-MA Processes

LI Dong-mei, LIU Wei-qi

(Dept. of Mathematics, Shanxi University Taiyuan 030006, China)

Abstract: Parameter estimation $\hat{\theta}$ for the parameter θ of the first-order MAX-MA processes is obtained, and $\hat{\theta}$, with probability 1, identifies the true parameter value θ exactly for n sufficiently large, so the strong consistency of parameter estimation is proved.

Key words: MAX-MA processes; infinite variance; parameter estimation; consistency

在电信、金融等行业中具有无限方差的 ARMA 模型是非常流行的建模工具, 关于这方面的成果与应用可参见文[1]与其中的讨论. 本文考虑一阶极大滑动平均过程(MAX-MA(1))

$$X_t = Z_t \vee \theta Z_{t-1},\ t = 1, 2, \cdots, \tag{1}$$

其中 $a \vee b = \max(a, b)$, 且 $\theta \geq 0$. $\{Z_t\}$ 是独立同分布随机变量序列, Z_1 与 $E_1^{-1/\alpha}$ 同分布, $\alpha > 0$, E_1 服从均值为 λ 的指数分布. 这个过程是 MA(1) 过程的替换, 同文献[2]. 事实上, 令

$$X_t = (Z_t^x + \theta^x Z_{t-1}^x)^{1/x},\ \theta > 0,\ x > 0, \tag{2}$$

$\{Z_t\}$ 同前, 当 $x = 1$, 式(2)为 MA(1) 模型, 当 $x = \infty$, 式(2)为 MAX-MA(1) 模型.(参见文献[3]).

在文献[2]中给出 MAX-ARMA(p,q) 过程

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} \vee \varphi_2 X_{t-2} \vee \cdots \varphi_p X_{t-p} \vee Z_t \vee \theta_1 Z_{t-1} \vee \cdots \vee \theta_q Z_{t-q}$$

的参数估计, 其中 $\varphi_i \geq 0$, $\theta_j \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, $\{Z_t\}$ 同前. 在 MAX-ARMA(p,q) 过程中向量 $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ 的参数估计为(对充分大的 n)

$$\hat{\varphi}_j := \bigwedge_{t=j+1}^{n} \frac{X_t}{X_{t-j}},$$

对 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 作了正确的估计之后, 可寻找这样的 t, 使得

$$X_t \neq \varphi_1 X_{t-1} \vee \cdots \vee \varphi_p X_{t-p} \text{ 且 } X_{t+1} \neq \varphi_1 X_t \vee \cdots \vee \varphi_p X_{t+1-p}. \tag{3}$$

记 $T = \{t : X_t \neq \varphi_1 X_{t-1} \vee \cdots \vee \varphi_p X_{t-p}$ 且 $X_{t+1} \neq \varphi_1 X_t \vee \cdots \vee \varphi_p X_{t+1-p}\}$, $T_s = \{t \in T \mid \frac{X_{t+1}}{x_t} = \frac{X_{s+1}}{X_s}\}$, $S = \{t : t$ 满足 $|T_t| = \max\{|T_s| : s \in T\}\}$, 其中 $|T_s|$ 表示集合 T_s 的元素个数. 因"$=$"为集合 T 的一个等价关系, 故此关系可确定 T 的一个划分 $\{T_s \mid s \in T\}$.

向量 $(\theta_1, \cdots, \theta_q)$ 的参数估计为(对充分大的 n 只考虑 $q = 1$ 时的情况)

* 收稿日期: 2003-08-25
基金项目: 山西省自然科学基金资助项目
作者简介: 李冬梅(1977-), 女, 硕士生. 主要从事概率统计研究.

$$\hat{\theta} = \frac{X_{t_1+1}}{X_{t_1}},\ t \in S.$$

文中对过程(1)给出 θ 的另一种估计. 由于所有的 t 均满足式(1), 因此可定义

$$\hat{\theta} := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \frac{X_{t+1}}{X_t}. \tag{4}$$

下面给出参数估计(4)的相合性的证明.

定理 设 $\{X_t, t=1,2,\cdots\}$ 满足式(1), $\hat{\theta}$ 为式(4)所定义, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\hat{\theta}-\theta)=0$ a.s..

引理 设非负随机序列 $\{X_t, t\geq 1\}$ 满足 $P\{X_t=0,\ \text{i.o.}\}=1$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty}X_t=0$, a.s..

证明 因为 $P\{X_t=0\quad \text{i.o.}\}=1$, 则

$$P\{\limsup_{t\to\infty} X_t = 0\} = P\{\omega: \omega\in\{X_t=0\}\text{ 对无穷多个 } n \text{ 成立}\} = P\{\omega: \omega\in\{X_t=0\}\quad \text{i.o.}\} = 1,$$

所以

$$\limsup_{t\to\infty} X_t = 0 \quad \text{a.s.}. \tag{5}$$

又因 $\{x_t\}$ 为非负随机序列, 故

$$\liminf_{t\to\infty} X_t \geq 0 \quad \text{a.s.}. \tag{6}$$

由式(5), (6)知 $\lim\limits_{t\to\infty}X_t=0$, a.s. 引理证毕.

下面证明定理. 由于

$$\begin{aligned}|\hat{\theta}-\theta| &= 2(\hat{\theta}\vee\theta)-\hat{\theta}-\theta = 2\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{X_t}\vee\theta\Big)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{X_t}-\theta \leq \\ &2\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{Z_t}\vee\theta\Big)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{X_t}-\theta = 2\,\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{X_t}-\theta = \\ &\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{X_t}\Big)+\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\theta\Big) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{X_{t+1}}{X_t}\Big)+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{X_{t+1}-\theta Z_t}{Z_t}.\end{aligned}$$

所以只要证明了 $\lim\limits_{t\to\infty}\Big(\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{X_{t+1}}{X_t}\Big)=0$ a.s. 与 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{X_{t+1}-\theta Z_t}{Z_t}=0$ a.s. 即可.

若 $\theta\leq 1$, 则令

$$A = [Z_t \geq \theta^{-1}(\theta Z_{t-1}\vee Z_{t+1})], \tag{7}$$

否则, 令

$$A = [Z_t \geq \theta Z_{t-1}\vee Z_{t+1}]. \tag{8}$$

由于式(7), (8)中不等式两边的随机变量独立且几乎处处有限, 因此 $P(A)>0$, 而且在 A 上

$$X_t = Z_t,\ X_{t+1} = \theta Z_t,$$

因此 $P(X_t=Z_t,\ X_{t+1}=\theta Z_t)>0$, 由遍历定理得

$$P(X_t = Z_t,\ X_{t+1} = \theta Z_t \quad \text{i.o.}) = 1,$$

即

$$P\Big(\Big(\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{X_{t+1}}{X_t}\Big)=0,\ \frac{X_{t+1}-\theta Z_t}{Z_t}=0\quad \text{i.o.}\Big)=1,$$

由式(1)知

$$\Big(\frac{X_{t+1}}{Z_t}-\frac{X_{t+1}}{X_t}\Big)\geq 0,\ \frac{X_{t+1}-\theta Z_t}{Z_t}\geq 0.$$

由引理即可证得定理成立.

本文给出的参数估计方法可应用到过程 MAX-MA(q), $q\geq 1$ 的参数估计.

参考文献:

[1] Resenick S I. Heavy tail modeling and teletra-cdata[J]. Ann. Statist, 1997, 25: 1805-1869.

[2] Davis R A, Resnick S I. Basic properties and prediction of MAX-ARMA proceeces[J]. Adv. Appl. Prob, 1989, 21: 781-803.

[3] Zarepour M, Banjevic D. A note on maximum autoregressive processes of order-one[J]. J. TimeSer. Anal, 2002, 23: 619-626.