文章编号: 1001-4098(2004)02-0020-03

保险系统损失分布模型新探*

李冬梅, 刘维奇

(山西大学 数学系, 山西 太原 030006)

摘 要: 基于一定范围内的人口总量很大(可视为无穷大), 且保险人数为随量, 每个被保险人的平均损失费各不相同时, 导出被保险人总损失费的分布。较文[3]更具实用性。

关键词: 损失费; 保险费; 概率分布

中图分类号: F222.1 文献标识码: A

1 引言

保险公司关心的是在一定时间内所有投保人发生危险事故的总损失费。设在一定时间内有 r 个人投保, 则总损失费为 $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$, 其中 X_i 为第 i 个投保人在一年内发生危险事故的损失费。由于危险事故的保险都具有"无记忆性", 从而可导出损失费 X 服从指数分布。"无记忆性"是指: 投保人投保后在已发生危险事故的损失费为 t 的条件下再次发生危险事故的损失费超过 s 的概率与投保人刚投保后发生危险事故的损失费超过 s 的概率相等, 即

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \quad s > 0, t > 0$$

我们容易证明:

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

即

$$F(t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \lambda > 0$$

即服从参数为 λ 的指数分布, 且 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

文[1]对 r 为常数, 且设 X_i 独立同分布参数为 λ 的指数分布的情形, 讨论了 Y 的分布, 得到 Y 的分布密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^r}{\tau(r)} y^{r-1} e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

文[2]对 r 为服从二项分布的随机变量, 且设 X_i 独立同分布参数为 λ 的指数分布的情形, 给出 Y 的分布密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \lambda e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

文[3]对 r 为常数与 r 为服从二项分布的随机变量, 且设 X_i 间相互独立, X_i 服从参数为 $\lambda_i(\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$ 的指数分布的情形, 给出 Y 的分布密度为

(1) r 为常数

* 收稿日期: 2003-06-23
作者简介: 李冬梅, 山西大学数学系。

$$f_Y(y)=\begin{cases}\left(\prod_{i=1}^{r}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{r}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

(2) $r\sim B(n,p)$

$$f_Y(y)=\begin{cases}(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{s=1}^{k}\frac{\lambda_s p}{1-p}\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

由于一定时间范围内的人口总量 n 很大(可视为无穷大), 故不妨设保险公司一年内有 r 个人投保, 其中 r 服从泊松分布 $P(k,\mu)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$, 且一般情况下每个投保人的平均损失费不相等, 即 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, 那么这种条件下 r 个投保人的总损失费的分布如何? 其平均损失费为多少? 这正是本文研究的两个问题。

2　主要结果

设在一定时间范围内的人口总量 n 很大(可视为无穷大), 有 r 个投保人, 每个投保人的损失费

$$X_i\sim\begin{cases}\lambda_i e^{-\lambda_i t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases},\quad \lambda_i>0(i=1,2,\cdots,r)$$

且 X_i 间相互独立, 则 r 个投保人的损失费 $Y=\sum_{i=1}^{r}X_i$ 的分布密度、期望值分别为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)\lambda_i e^{-\lambda_i y}\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}\tag{1}$$

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\tag{2}$$

3　证明

证明(1) 式之前先给出一个引理。

引理　设 a_i 为实数, 且 $a_i\neq a_j(i\neq j)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{a_j}{a_j-a_i}\right)=1$$

证明见文[3]。

下证(1) 式。

当 $y>0$ 时, 由全概率公式得

$$\begin{aligned}&F_Y(y)\\ =&P(Y<y)\\ =&\sum_{k=1}^{\infty}P(Y<y|r=k)P(r=k)+P(Y<y)|r=0)P(r=0)\\ =&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^y f_Y(x)\,\mathrm{d}x\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}+e^{-\mu}\\ =&\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^y\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i x}\mathrm{d}x\right]\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}+e^{-\mu}\\ =&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)(1-e^{-\lambda_i y})\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}+e^{-\mu}\\ =&1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i y}\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}\end{aligned}$$

则 Y 的分布密度为

$$f_Y(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)\lambda_i e^{-\lambda_i y}\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

当 $y \le 0$ 时, 易见 $F(y) = 0$。

综上所述, (1) 得证。

$$
\begin{aligned}
& E(Y) \\
= & E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r \mid r = k) P(r = k) \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} \right) \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}
\end{aligned}
$$

(2) 式成立。

4 结束语

保险公司在保险定价时, 需要知道损失费的分布情况。因此研究被保险人的总损失费的分布及期望平均值是有实际意义的。本文讨论了一个比[3] 更为广泛、更符合实际情况的保险损失费模型, 导出了总损失费的分布密度函数、均值, 为保险公司在保险定价时提供了一个更为合理的依据。

参考文献:

[1] 王志忠, 刘裔宏. 保险系统的损失分布模型[J]. 经济数学, 1997, (2): 55～58.

[2] 焦桂梅, 杨晓卫. 再论保险系统的一个损失分布模[J]. 经济数学, 1999, (3): 23～26.

[3] 吴和成, 郑垂勇. 保险系统的一个损失分布模型[J]. 系统工程, 2003, 21(1): 94～97.

[4] 复旦大学. 概率论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

A New Model for Loss Distribution in Insurance Systems

LI Dong-mei, LIU Wei-qi

(Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: In a certain area, there are a large populations, and the number of the in persons is a random variable, and every person 's mean loss fees is not equal. In the paper the distribution of the total loss fees for insurance is studied.

Key words: Loss Fee; Premium; Probability Distribution