* 山西大学学报(自然科学版) 28(3): 247~ 252, 2005
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

文章编号: 0253-2395(2005)03-0247-06

保险系统的两类损失分布模型

刘维奇, 史金凤

(山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘　要: 基于投保人数为服从某一离散型分布的随机变量, 在每个投保人的平均损失费所服从指数分布的参数全相同和各不相同两种情况下导出被保险人总损失费的分布密度; 在投保人的平均损失费服从指数分布的参数不全相同情况下, 导出被保险人总损失费的特征函数, 并给出一种特殊情形下的分布密度.

关键词: 损失费; 保险费; 概率分布
中图分类号: O211　　　文献标识码: A

保险公司在保险费定价时需要知道被保险人总损失费的分布, 因而研究被保险人总损失费的分布以及期望是具有实际意义的. 设在一定时期内投保人数为随机变量 r, 第 i 个投保人发生危险事故时的损失费为 X_i, 则总损失费 $Y=\sum_{i=1}^{r}X_i$, 由于危险事故具"无记忆性", 即投保人投保后发生危险事故损失费超过 t 元的条件下再发生危险事故损失费超过 s 元的概率与投保人刚投保发生危险事故损失费超过 s 元的概率一样, 亦即

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s), s > 0, t > 0,$$

由此可以证明

$$P(X > t) = e^{-\lambda t},$$

则

$$F(t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0, \lambda > 0,$$

即 X_i 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且其期望为 $E(X_i)=\frac{1}{\lambda_i}$.

文[1]对 r 为常数, 且 X_i 独立同分布服从参数为 λ 的指数分布的情形, 讨论了 Y 的分布, 得到总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}y^{r-1}e^{-\lambda y}, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0.\end{cases} \tag{1}$$

文[2]对 r 为服从二项分布的随机变量, 且 X_i 独立同分布服从参数为 λ 的指数分布的情形, 得到总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda y}, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0.\end{cases} \tag{2}$$

* 收稿日期: 2004-08-31
基金项目: 山西省自然科学基金(20031005)
作者简介: 刘维奇(1963-), 男, 山西忻州人, 副教授, 管理科学与工程博士生, 从事概率统计与金融工程研究.

文[3]分别对 r 为常数或者服从二项分布的随机变量, 且 X_i 相互独立, 服从参数为 $\lambda_i(\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$ 的指数分布的情形, 分别给出总损失费 Y 的分布密度.

(1) r 为常数时, 总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right) \sum_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{r} \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\right) e^{-\lambda_i y}, & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

(2) r 为服从二项分布的随机变量时, 即 $r \sim B(n, p)$, 总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\left(\prod_{s=1}^{k} \dfrac{\lambda_s p}{1-p} \right) \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \right) e^{-\lambda_i y} \right), & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

文[4]对 r 为服从泊松分布的随机变量, 即 $r \sim P(k, \mu)$ 时, 得到总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i y} \right) \dfrac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

本文中, 假设 r 为服从某一离散分布的随机变量, 得到了 r 个投保人的总损失费分布形式及其平均损失费的通式, 推广了文献[1~4]中的相关结论.

1 主要结果及其证明

设在一定范围, 一定时间内, 投保人数为服从某一离散分布的随机变量 r, 不妨设 r 的分布列为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \end{pmatrix}.$$

设第 i 个投保人的损失费 X_i, X_i 间相互独立, 且 X_i 服从参数为 λ_i 的指数分布, 即

$$X_i \sim \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, r)$. 我们可以得到:

定理 1 若 X_i 相互独立同分布服从参数为 λ 的指数分布, 即 $\lambda_i = \lambda (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则 r 个投保人的总损失费 $Y = \sum_{i=1}^{r} X_i$ 的分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} \dfrac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!} P_k, & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

其期望为:

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k P_k. \tag{7}$$

为了证明定理我们先给出以下引理, 其证明见文献[3].

引理 设 a_i 为实数, 且 $a_i \neq a_j (i \neq j)$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_j}{a_j - a_i} \right) = 1.$$

定理 1 的证明: 当 $y > 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} P(Y < y \mid r = k) P(r = k) = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^y f_Y(y) \mathrm{d}x \right) P_k + P_0 = \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^y \frac{\lambda^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)P_k + P_0 =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^y x^{k-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right)P_k + P_0 =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\sum_{s=0}^{k-1}e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^s}{s!}\right)P_k + P_0 =$$

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{k-1}e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^s}{s!}\right)P_k.$$

当 $y \leqslant 0$ 时, 显然有 $F_Y(y) = P(Y < y) = 0$. 因而我们可以得到总损失费 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{k-1}e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^s}{s!}\right)P_k, & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0. \end{cases}$$

从而知总损失费 Y 的分布密度可由(6)给出.

总损失费 Y 的期望

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}E(X_1 + X_2 + \cdots + X_r \mid r = k)P(r = k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\lambda}P_k =$$

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}kP_k.$$

定理1得证.

定理2 若 X_i 相互独立, 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则 r 个投保人的总损失费 $Y = \sum_{i=1}^{r}X_i$ 的分布密度为:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right)\lambda_i e^{-\lambda_i y}\right)P_k, & \text{如果 } y > 0, \\ 0, & \text{如果 } y \leqslant 0, \end{cases} \tag{8}$$

其期望为:

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\right)P_k. \tag{9}$$

证明: 当 $y > 0$ 时,

$$F_Y(y) = P(Y < y) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(Y < y \mid r = k)P(r = k) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^y f_Y(y)\mathrm{d}x\right)P_k + P_0 =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^y\left(\prod_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k}\frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\right)e^{-\lambda_i x}\mathrm{d}x\right)P_k + P_0 =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right)(1 - e^{-\lambda_i y})\right)P_k + P_0 =$$

$$1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k}\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}\right)e^{-\lambda_i y}\right)P_k.$$

当 $y \leqslant 0$ 时, 显然有 $F_Y(y) = P(Y < y) = 0$. 因而我们可以得到总损失费 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\dfrac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i y}\right)P_k, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0.\end{cases}$$

由此可知(8)为总损失费 Y 的分布密度.

总损失费 Y 的期望

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(X_1+X_2+\cdots+X_r)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}E(X_1+X_2+\cdots+X_r\mid r=k)P(r=k)=\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\right)P_k.\end{aligned}$$

定理 2 得证.

2 结果应用与推广

在本节中我们可以看到文[1]~[4]的结论是本文结论的特殊情形.

若 r 为常数, 则 $P_k=\begin{cases}1, & k=r\\ 0, & k\neq r\end{cases}$, 易得:

推论 1 若 r 为常数, X_i 相互独立同分布服从参数为 λ 的指数分布, 即 $\lambda_i=\lambda(i=1,2,\cdots,r)$, 则总损失费 Y 的分布密度可由(1)给出.

推论 2 若 r 为常数, X_i 相互独立, 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则总损失费 Y 的分布密度可由(3)给出.

若 r 为服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量, 则 $P_k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, 易得:

推论 3 若 r 为服从二项分布 $B(n,p)$ 随机变量, X_i 相互独立同分布服从参数为 λ 的指数分布, 即 $\lambda_i=\lambda(i=1,2,\cdots,r)$, 则总损失费 Y 的分布密度可由(2)给出, 总损失费 Y 的期望为:

$$EY=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\lambda}P_k=\frac{np}{\lambda}.$$

推论 4 若 r 为服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量, X_i 相互独立, 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则总损失费 Y 的分布密度可由(4)给出, 总损失费 Y 的期望为:

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\right)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

若 r 为服从泊松分布 $P(k,\mu)$ 的随机变量, 则 $P_k=\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$, 易得:

推论 5 若 r 为服从泊松分布 $P(k,\mu)$ 的随机变量, X_i 相互独立, 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则总损失费 Y 的分布密度可由(5)给出, 总损失费 Y 的期望为:

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\right)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}.$$

若 r 为服从负二项分布 $Nb(k,l,p)$ 的随机变量, 则 $P_k=C_k^{-l}p^l(-q)^k$, 易得:

推论 6 若 r 为服从负二项分布 $Nb(k,l,p)$ 的随机变量, X_i 相互独立, 服从参数为 λ_i 的指数分布, 且当 $i\neq j$ 时, $\lambda_i\neq\lambda_j$, 则总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\dfrac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}\right)\lambda_i e^{-\lambda_i y}\right)C_k^{-l}p^l(-q)^k, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0.\end{cases}\tag{10}$$

定理 1、定理 2 在投保人数 r 为服从某一离散型分布的随机变量的情况下, 分别就 λ_i 全都相等与全不相等两种情形给出了总损失费 Y 的分布密度及其期望. 若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$ 不全相等, 总损失费 Y 的分布密度又如何?

设投保人数 r 为常数, $X_{ki}(i=1,2,\cdots,r_k)$ 服从参数为 λ_k 的指数分布, 共中 $k=1,2,\cdots,s$, 则 $r_1+r_2+\cdots+r_s=r$. 设 $Y_k=\sum_{i=1}^{r_k}X_{ki}(k=1,2,\cdots,s)$, 则总损失费为 $Y=\sum_{k=1}^{s}Y_k$. 由定理 1 易知: Y_k 的分布密度为:

$$f_k(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_k^{r_k}}{\Gamma(r_k)}y^{r_k-1}e^{-\lambda_k y}, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,s).$$

从而可以知道 $Y_k\sim\Gamma(r_k,\lambda_k)(k=1,2,\cdots,s)$, 因而可以知道 $Y_k(k=1,2,\cdots,s)$ 的特征函数为:

$$\varphi_k(t)=\left(1-\frac{it}{\lambda_k}\right)^{-r_k}.$$

又 $Y_k(k=1,2,\cdots,s)$ 相互独立, 所以总损失费 $Y=\sum_{k=1}^{s}Y_k$ 的特征函数为:

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{s}\left(1-\frac{it}{\lambda_k}\right)^{-r_k}. \tag{11}$$

总损失费 Y 的期望

$$E(Y)=\frac{\varphi'(0)}{i}=\sum_{k=1}^{s}\frac{r_k}{\lambda_k}. \tag{12}$$

于是, 有下面的结论.

定理 3 投保人数 r 为常数, $X_{ki}(i=1,2,\cdots,r_k)$ 间相互独立, 服从参数为 λ_k 的指数分布, 其中 $k=1,2,\cdots,s$, 且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=r$, 则总损失费 Y 的特征函数由(11)给出, 总损失费 Y 的期望由(12)给出.

如果 r 为随机变量, 结果将更加复杂, 即使 r 为常数, 要得到其分布函数形式也非常困难. 我们考虑其简单形式, 令 $s=2$ 可以得到以下的结论:

推论 7 投保人数 r 为常数, $X_{ki}(i=1,2,\cdots,r_k)$ 服从参数为 λ_k 的指数分布, 其中 $k=1,2$ 且 $r_1+r_2=r$, 则总损失费 Y 的分布密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}e^{\lambda_1 y}\sum_{k=0}^{r_1-1}C_{r_1-1}^{k}y^{(r_1-k-1)}(-1)^k\sum_{i=1}^{r_2+k}(-1)^{i+1}\dfrac{(i-1)!\,C_{r_2+k-1}^{i-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^i}y^{r_2+k-i}e^{(\lambda_1-\lambda_2)y}, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0.\end{cases} \tag{13}$$

证明 设 $Y_k=\sum_{i=1}^{r_k}X_{ki}(k=1,2,)$, 则 Y_k 的分布密度为:

$$f_k(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_k^{r_k}}{\Gamma(r_k)}y^{r_k-1}e^{-\lambda_k y}, & \text{如果 } y>0,\\ 0, & \text{如果 } y\leqslant 0\end{cases}\quad(k=1,2).$$

因而总损失费 Y 的分布密度为:

$$\begin{aligned}&f_Y(y)=\\&\int_{-\infty}^{y}f_1(y-u)f_2(u)\mathrm{d}u=\\&\int_0^y\frac{\lambda_1^{r_1}}{\Gamma(r_1)}(y-u)^{r_1-1}e^{-\lambda_1(y-u)}\frac{\lambda_2^{r_2}}{\Gamma(r_2)}u^{r_2-1}e^{-\lambda_2 u}\mathrm{d}u=\\&\frac{\lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}e^{\lambda_1 y}\int_0^y(y-u)^{r_1-1}u^{r_2-1}e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{14}$$

注意到

$$\int_0^y(y-u)^{r_1-1}u^{r_2-1}e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}\mathrm{d}u=$$

$$\int_0^y \sum_{k=0}^{r_1-1} C_{r_1-1}^k y^{(r_1-k-1)}(-1)^k u^{r_2+k-1} e^{(\lambda_1-\lambda_2)u} \mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{r_1-1} C_{r_1-1}^k y^{(r_1-k-1)}(-1)^k \int_0^y u^{r_2+k-1} e^{(\lambda_1-\lambda_2)u} \mathrm{d}u, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^y u^{r_2+k-1} e^{(\lambda_1-\lambda_2)u} \mathrm{d}u = \\
&\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^y u^{r_2+k-1} \mathrm{d}(e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}) = \\
&\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} u^{r_2+k-1} e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}\Big|_0^y - \frac{r_2+k-1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^y u^{k-1} e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}\mathrm{d}u = \\
&\cdots = \\
&\sum_{i=1}^{r_2+k}(-1)^{i+1}\frac{(i-1)!\,C_{r_2+k-1}^{i-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^i} y^{r_2+k-i} e^{(\lambda_1-\lambda_2)y},
\end{aligned} \tag{16}$$

把(15)和(16)带入(14)式得:

$$f_Y(y) = \frac{\lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} e^{\lambda_1 y}\sum_{k=0}^{r_1-1} C_{r_1-1}^k y^{(r_1-k-1)}(-1)^k \sum_{i=1}^{r_2+k}(-1)^{i+1}\frac{(i-1)!\,C_{r_2+k-1}^{i-1}}{(\lambda_1-\lambda_2)^i} y^{r_2+k-i} e^{(\lambda_1-\lambda_2)y}.$$

所以总损失费 Y 的分布密度为(13). 推论 7 得证.

3 结束语

本文就投保人数为服从某一离散型分布的随机变量 r, 分别在 r 个投保人的平均损失费服从的指数分布的参数全相同和各不相同两种情况下导出被保险人总损失费的分布密度函数, 并对 r 个投保人的平均损失费服从的指数分布的参数不全相同情况下导出被保险人总损失费的特征函数, 为保险精算研究提供了基础. 但由于计算复杂, 本文未能对参数不全相等情况给出被保险人总损失费的分布密度函数的一般形式, 有待于进一步的研究.

参考文献:

[1] 王志忠, 刘裔宏. 保险系统的损失分布模型[J]. 经济数学, 1997(2): 55-58.

[2] 焦桂梅, 杨晓卫. 再论保险系统的一个损失分布模型[J]. 经济数学, 1999(3): 23-26.

[3] 吴和成, 郑垂勇. 保险系统的一个损失分布模型[J]. 系统工程, 2003(1): 94-97.

[4] 李冬梅, 刘维奇. 保险系统的损失分布模型新探[J]. 系统工程, 2004(2): 20-22.

[5] EMBRECHTS P, KLIIPPELBERG C, MIKOSCH T. Malelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. Spring-Verlag Berlin Heidelberg, 1997: 22-48.

The Distribution Model of Two Loss in Insurance System

LIU Weiqi, SHI Jinfeng

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Assuming that the number of the insured persons is a discrete random variable, the distribution and mathematical expection of the total loss fees for insurance are derived in the two cases that every person's mean loss fees is all equal and not equal. Furthermore, the characteristic function and expection in the case that every person's mean loss fees is not all equal were studied, and the distribution of a special situation was gaven. This conclusion is more general.

Key words: loss fee; premium; distribution