第
5 A AE

双 性模型 及

要 实践中，许多来 重 型就是刻
数据的一种类型．基于 一 双线性模
$= cX_{t-k}Z_{t-l} + Z_t$，t 模 并在此基础
了模型的尾部概率性质 不 并未采用通常的
方法，而是运用点过程

键词 重尾分布；点过
MR(2000) 主题分类 6
类 O211.6

模 于分析并且它们对
，在
能 存在对
据模拟得 间序
最近，非线性时
究 ，那些模型的研究 局限
类 双线性模型、门限自回
用 些呈现出非线性、长 及重尾特征的数
例如，完成一项 作的 cpu 时间、电 数 网络
据就可以用重尾情形下的双线性模
一般形式

关于双线性
引进，接着就得
Pham, Ts
些研

模型的稳定解以
解 在 断进

文 年 5
山西省自然科学基金 (200

布）、模型的识别（如借助高阶矩）、模型参数的估计理论（矩估计、极大似然估计、最小二乘估计、频域估计、估计的相合性等）、极值理论等．但是，多数文章的内容都是在噪声变量的方差有限的情况下展开研究的．然而，在实践中，许多来自电信、经济和金融等领域的数据均呈现出重尾特征．因此有必要去研究噪声服从重尾分布时双线性模型的概率性质以及收敛性质．在研究收敛性质时，由于方差不存在，我们并未采用通常的研究方法，而是运用点过程理论对其进行分析和研究．

本文研究的模型为

$$X_t = cX_{t-k}Z_{t-l} + Z_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{1.1}$$

其中 $\{Z_t\}$ 是独立同分布序列且服从分布 F, F 满足

$$1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x), \qquad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

而 L 是慢变化函数，其中 c 是常数且满足

$$|c|^{\alpha}E|Z_1|^{\alpha} < 1, \tag{1.3}$$

并且对整个过程 $\{Z_t\}$ 满足平衡条件

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P[Z_1 > x]}{P[|Z_1| > x]} = p. \tag{1.4}$$

这里 $0 \le p \le 1$.

针对上述模型，本文第 2 节研究模型的尾部的概率性质，第 3 节运用点过程方法对

若 U_ζ 或 V_η 是正规变化的，那么存在极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\zeta-\eta}V_\eta(x)}{U_\zeta(x)}=c, \qquad 0\le c\le\infty.$$

该极限可唯一地表示成

$$c=\frac{\zeta-\alpha}{\alpha-\eta}, \qquad \eta\le\alpha\le\zeta. \tag{1.8}$$

若 $c=\infty$, 那么 $\alpha=\eta$.

设 E 为欧氏状态空间，$\mathcal{G}$ 为 σ 代数，对 $x\in E$, $B\in\mathcal{G}$, 若 $x\in B$, $\varepsilon_x(B)=1$, 否则为 0. 点测度 m 定义为 $\sum\limits_{i\in I}\varepsilon_{x_i}$, 非负整数值，且在 E 的紧子集上有限. 这类测度的全体的集合记为 $M_p(E)$, $\mathcal{M}_p(E)$ 是通过数值映射 $m\to m(B)$ 得到的最小的 σ 代数，这里 $m\in M_p(E)$, $B\in\mathcal{G}$. 空间 E 上的点过程是从一概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 到 $(M_p(E),\mathcal{M}_p(E))$ 上的测度映射.

$(E,\mathcal{G})$ 上均值测度为 μ 的泊松过程是一个点过程 ξ, 且 ξ 满足对任意 $B\in\mathcal{G}$,

$$P[\xi(B)=k]=\begin{cases}\exp\left(-\mu(B)\right)(\mu(B))^k/k!, & 若\ \mu(B)<\infty,\\ 0, & 若\ \mu(B)=\infty.\end{cases}$$

如果 $B_1,\cdots,B_n\in\mathcal{G}$ 是互斥的，那么 $\xi(B_1),\cdots,\xi(B_n)$ 是独立的，该独立性特征叫做完全独立性. 泊松过程 ξ 称作泊松随机测度 (PRM).

引理 1.3[9] $\{Z_t\}$ 是独立同分布随机变量列，定义

$$\xi_n:=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{(kn^{-1},Z_k)}$$

且 ξ 是 $(0,\infty)\times E$ 上均值测度为 $dt\times d\mu$ 的泊松随机测度，则在空间 $M_p((0,\infty)\times E)$ 上,

$$\xi_n\Longrightarrow\xi$$

的充分必要条件是

$$nP(Z_1\in\cdot)\longrightarrow\mu(\cdot). \tag{1.9}$$

推论 1.4 若 $\{Z_n,\ n\ge1\}$ 是具有共同分布为 $F(x)$ 的 R^d 上的独立随机变量列，则 F 满足正规变化条件

$$nF(a_n\,\cdot)=nP[a_n^{-1}Z_1\in\cdot]\xrightarrow{v}\nu \tag{1.10}$$

当且仅当

$$\xi_n:=\sum_k\varepsilon_{(kn^{-1},\,a_n^{-1}Z_n)}\Longrightarrow\xi.$$

这里 ξ 是 $(0,\infty)\times R^d$ 上均值测度为 $dt\times d\mu$ 的泊松随机测度.

2 尾部概率性质

我们知道在统计推断与预测中经常要做的假定是模型的解的稳定性. 因此在探讨模型的各种性质前有必要研究模型的解的平稳性. 当然，在这方面，人们也做了大量工作. 例如， Pham-Dinh 和 Tran[4] 对简单一阶双线性模型作了研究， Bhaskara Rao[10]

等人对 $l=1$, $q=0$ 的情形作了研究，还有 Liu 和 Brockrel[11] 对较一般场合的模型的稳定解存在的条件作了研究，其中，这些文章中也有的含盖了对噪声 (新息) 变量的方差无限情形下模型稳定解存在的条件. 假如观测结果和新息过程呈现出某种突发性，且 X_{t-i} 与 Z_{t-i} 的作用显著的话，那么我们就有研究具有无限方差的双线性时间序列模型稳定解存在条件的必要.

对模型

$$X_t-\sum_{i=1}^{p}\phi_iX_{t-i}=\sum_{j=0}^{q}\theta_jZ_{t-j}+\sum_{i=1}^{m}b_{i1}X_{t-i}Z_{t-l},\qquad t=0,\pm1,\cdots. \tag{2.1}$$

若 $\{Z_t\}$ 是独立同分布随机变量列，且 $E|Z_1|^\gamma<\infty$, 对某个 $\gamma>0$. 这里我们引入 (2.1) 的状态空间表达式，设

$$\boldsymbol{X}_t=\begin{pmatrix}X_t\\ \vdots\\ X_{t-r+1}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Z}_t=\begin{pmatrix}Z_t\\ \vdots\\ Z_{t-q}\end{pmatrix},$$

其中 $r=\max(p,m)$, 定义 $r\times r$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\phi_1&\phi_2&\cdots&\phi_p&0&\cdots&0\\ 1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ 0&1&\ddots&&&&0\\ \vdots&&&\ddots&&&\vdots\\ \vdots&&&&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&&&&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&\cdots&0&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{21}&\cdots&b_{m1}&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&&&&&\\ \vdots&&&&&&\\ \vdots&&&&&&\\ 0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

和 $r\times(q+1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\theta_0&\theta_1&\cdots&\theta_q\\ 0&0&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

于是重写方程 (2.1) 为

$$\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}_t+(\boldsymbol{A}+Z_{t-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}_{t-1}.$$

引理 2.1[11] 考虑方程 (2.1), 其中 $\{Z_t\}$ 是独立同分布变量列，且 $E|Z_t|^\gamma<\infty$ 对某个 $\gamma\in(0,2]$, 取

$$\Gamma=E\{|\boldsymbol{A}+Z_1\boldsymbol{B}|^{\gamma/2}\}. \tag{2.2}$$

若 $\lambda:=\rho(\Gamma)<1$, 那么

$$\boldsymbol{X}_t=C\boldsymbol{Z}_t+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{A}+Z_{t-l-j+1}\boldsymbol{B})C\boldsymbol{Z}_{t-n}. \tag{2.3}$$

这一无穷和级数几乎处处绝对收敛.

我们研究的模型是 (1.1), 并由 (1.3) 可得 $|c|^{\alpha/2}E|Z_1|^{\alpha/2}<1$, 且该式满足 (2.2), 可知

$$X_t = Z_t + \sum_{j=1}^{\infty} c^j Z_{t-jk} \prod_{i=0}^{j-1} Z_{t-ik-l}, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2.4}$$

是一个稳定过程 (这是因为上述无穷级数收敛), 而且, $\{X_t\}$ 满足双线性递归方程. 验证如下:

递归方程的右边

$$\begin{aligned} cX_{t-k}Z_{t-l} + Z_t &= Z_t + c\Big(Z_{t-k} + \sum_{j=1}^{\infty} c^j Z_{t-(j+1)k} \prod_{i=0}^{j-1} Z_{t-(i+1)k-l}\Big)Z_{t-l} \\ &= Z_t + cZ_{t-k}Z_{t-l} + \sum_{j=1}^{\infty} c^{j+1} Z_{t-(j+1)k} \prod_{i=-1}^{j-1} Z_{t-(i+1)k-l} \\ &= Z_t + cZ_{t-k}Z_{t-l} + \sum_{s=2}^{\infty} c^s Z_{t-sk} \prod_{i=0}^{s-1} Z_{t-hk-l} \\ &= Z_t + \sum_{s=1}^{\infty} c^s Z_{t-sk} \prod_{h=0}^{s-1} Z_{t-hk-l} \\ &= X_t. \end{aligned}$$

现设

$$\begin{aligned} &Y_t^{(0)} = Z_t, \\ &Y_t^{(j)} = Z_{t-jk} \prod_{i=0}^{j-1} Z_{t-ik-l}, \qquad j \ge 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

因此 (2.4) 可变形为

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c^j Y_t^{(j)}. \tag{2.6}$$

我们现在从一系列引理出发, 目的是研究 $Y_t^{(j)}$ 的尾部性质, 从而进一步研究这些变量和 (即 X_t) 的尾部概率性质.

引理 2.2[6] 若 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是随机变量 (不一定独立同分布), F 是满足 (1.2) 的分布函数. 并且

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(Y_i > x)}{1-F(x)} = p_i c_i, \qquad i = 1, \cdots, k, \ \ 0 \le p_i \le 1, \tag{2.7}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(Y_i < -x)}{1-F(x)} = (1-p_i)c_i, \qquad i = 1, \cdots, k, \ \ 0 \le p_i \le 1, \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(|Y_i| > x, |Y_j| > x)}{1-F(x)} = 0, \qquad i \ne j, \tag{2.9}$$

那么

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(|\sum_{i=1}^k Y_i| > x)}{1-F(x)} = \sum_{i=1}^k c_i.$$

定理 2.3 对于变量 $\{Y_t^{(j)},\ j\geq 1\}$, 随着 $n\to\infty$, 对于所有的 $h>j\geq 1$,

$$(1)\ \frac{P(|Y_t^{(j)}|>x)}{P(|Y_t^{(h)}|>x)}\longrightarrow c_{jh}:=(E|Z_1|^{\alpha})^{j-h},$$

$$(2)\ \frac{P(|Y_t^{(j)}|>x,\ |Y_t^{(h)}|>x)}{P(|Y_t^{(h)}|>x)}\longrightarrow 0.$$

证　在 Breiman[12] 的一个结果中他指出：如果 ξ 是一满足 (1.2) 的随机变量．而 η 是另一与 ξ 独立且满足 $E(|\eta|^{\gamma})<\infty$ 对于某个 $\gamma>\alpha$, 那么

$$P[\eta\xi>x]\sim aE|\eta|^{\alpha}P[|\xi|>x],\qquad x\to\infty$$

和

$$P[\eta\xi<-x]\sim(1-a)E|\eta|^{\alpha}P[|\xi|>x],\qquad x\to\infty,$$

成立，其中

$$a=\frac{rE(\eta^{\alpha}\mathbf{1}_{(\eta>0)})+(1-r)E((-\eta)^{\alpha}\mathbf{1}_{(\eta<0)})}{E(|\eta|^{\alpha})}.$$

又因为 $Y_t^{(j)}$ 满足 (2.5) 且 $E|Z_1|^{\gamma}<\infty$, 对于 $\gamma>\alpha$, 应用 Breiman 的结果可知对于 $j\geq 1$,

$$\begin{aligned}P[|Y_t^{(j)}|>x]&\sim E\Big(\Big|\prod_{i=0}^{j-1}Z_{t-ik-l}\Big|\Big)P[|Z_1|>x]\\&=(E|Z_1|^{\alpha})^{j}x^{-\alpha}L(x),\end{aligned}$$

于是

$$\frac{P[|Y_t^{(j)}|>x]}{P[|Y_t^{(h)}|>x]}\sim\frac{(E|Z_1|^{\alpha})^{j}x^{-\alpha}L(x)}{(E|Z_1|^{\alpha})^{h}x^{-\alpha}L(x)}=(E|Z_1|^{\alpha})^{j-h}.$$

此时结果 (1) 获证.

对于 (2), 记 $A=\prod_{i=0}^{j-1}Z_{t-ik-l}$, $B=\prod_{i=j}^{h-1}Z_{t-ik-l}$, 注意到

$$\begin{aligned}&P\big[|Y_t^{(j)}|>x,|Y_t^{(h)}|>x\big]\\&=P\Big[\Big|\Big(\prod_{i=0}^{j-1}Z_{t-ik-l}\Big)Z_{t-jk}\Big|>x,\ \Big|\Big(\prod_{i=0}^{j-1}Z_{t-ik-l}\Big)\Big(\prod_{i=j}^{h-1}Z_{t-ik-l}\Big)Z_{t-hk}\Big|>x\Big]\\&=:P\big[|AZ_{t-jk}|>x,\ |ABZ_{t-hk}|>x\big].\end{aligned}$$

由 Pratt 的引理 [13], 在 (9) 式中此值随着 [illegible] 收敛到 0

推论 2.5 如果 $\{Z_t\}$ 满足 (1.2) 且 c 满足 (1.3), 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\sum_{j=1}^{\infty}[E|cZ_1|^\alpha]^j=\frac{|c|^\alpha E|Z_1|^\alpha}{1-|c|^\alpha E|Z_1|^\alpha}. \tag{2.11}$$

证 显然对任意的 $s\geq 1$,

$$P\Big[\sum_{j=1}^{s}|c^jY_t^{(j)}|>x\Big]\leq P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x\Big].$$

于是应用推论 2.4,

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\geq\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{s}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\sum_{j=1}^{s}[E|cZ_1|^\alpha]^j. \tag{2.12}$$

令 $s\to\infty$ 得到 (2.12) 的下界，即

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\geq\sum_{j=1}^{\infty}[E|cZ_1|^\alpha]^j.$$

记 $W_j=\prod\limits_{i=0}^{j-1}cZ_{t-ik-l}$, 如果能证明

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\leq \text{const}\sum_{j=1}^{\infty}|c|^jE|W_j|^\delta$$

和对任意 $\varepsilon>0$ 都有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\leq\sum_{j=1}^{\infty}E(|W_t^{(j)}|^\alpha),$$

那么我们就可以得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\sum_{j=1}^{\infty}[E|cZ_1|^\alpha]^j.$$

为此，我们按照 [14,228 页] 的方法，分解事件 $[\bigvee\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]$. 于是

$$P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x\Big]$$

$$=P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x,\ \Big|\bigvee_{j=1}^{\infty}c^jY_t^{(j)}\Big|>x\Big]+P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x,\ \Big|\bigvee_{j=1}^{\infty}c^jY_t^{(j)}\Big|\le x\Big]$$

$$\le P\Big\{\bigcup_{j=1}^{\infty}\big[|c^jY_t^{(j)}|>x\big]\Big\}+P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x\Big]\mathbf{1}_{[|c^jY_t^{(j)}|\le x]}>x,\ \bigvee_{j=1}^{\infty}\big[|c^jY_t^{(j)}|\le x\big]$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}P\big[|c^jY_t^{(j)}|>x\big]+P\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x\Big]\mathbf{1}_{[|c^jY_t^{(j)}|\le x]}>x.$$

由马尔可夫不等式得

$$\frac{P[\sum_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le\frac{\sum_{j=1}^{\infty}P[|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}+\frac{E|c^jY_t^{(j)}|\mathbf{1}_{[c^jY_t^{(j)}\le x]}}{xP[|Z_1|>x]}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{II}.$$

对于 $\boldsymbol{I}$, 同样运用 Cline[15] 和 Breiman[12] 的结果且运用 Karamata 表达式 [8], 交换和号与积分号,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{\infty}P[|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\sum_{j=1}^{\infty}E|W_t^{(j)}|^{\alpha}=\sum_{j=1}^{\infty}\big[E|cZ_1|^{\alpha}\big]^j.$$

对于 $\boldsymbol{II}$, 由定理 2.3 知, $|c^jY_t^{(j)}|=|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|$ 的尾部指标为 $-\alpha$ 正规变化的，则

$$\begin{aligned}&\frac{E|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\mathbf{1}_{[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\le x]}}{P[|Z_1|>x]}\\
=&\frac{E|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\mathbf{1}_{[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\le x]}}{xP[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}\cdot\frac{P[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\\
=&\frac{E|c^jY_t^{(j)}|\mathbf{1}_{[|c^jY_t^{(j)}|\le x]}}{xP[|c^jY_t^{(j)}|>x]}\cdot\frac{P[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}{P[|Z_1|>x]}.\end{aligned}$$

对于 $0<\alpha<1$, 由部分积分以及引理 1.2,

$$\frac{E|c^jY_t^{(j)}|\mathbf{1}_{[|c^jY_t^{(j)}|\le x]}}{xP[|c^jY_t^{(j)}|>x]}\longrightarrow\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

因为 $P[|Z_1|>x]$ 是指标为 $-\alpha$ 正规变化的，则对充分大的 x, 存在某个 $k_1>0$, $k_2>0$,

$$\begin{aligned}&\frac{P[|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\frac{P[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le k_1E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big),\\
&\frac{E|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\mathbf{1}_{[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\le x]}}{xP[|Z_1|>x]}\le k_2E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}P[|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le k_1\sum_{j=1}^{\infty}E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{E|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\mathbf{1}_{[|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\le x]}}{xP[|Z_1|>x]}\le k_2\sum_{j=1}^{\infty}E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big).$$

于是

$$\limsup_{x\to x}\frac{P[\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le k\sum_{j=1}^{\infty}E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big). \tag{2.13}$$

对于 $\alpha>1$, 按照 [14,229 页] 的方法, 取 $r>\alpha$, 定义 $W=\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}|$ 和 $p_j=|W_t^{(j)}|/W$. 由 Jensen 不等式,

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|\Big)^r=W^r\Big(\sum_{j=1}^{\infty}p_j|Z_{t-jk}|\Big)^r$$

$$\le W^r\sum_{j=1}^{\infty}p_j|Z_{t-jk}|^r=W^{r-1}\sum_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|^r,$$

那么

$$\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}{P[|Z_1|>x]}=\frac{P[(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|)^r>x^r]}{P[|Z_1|^r>x^r]}$$

$$\le\frac{P[W^{r-1}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|^r>x^r]}{P[|Z_1|^r>x^r]}.$$

于是

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}||Z_{t-jk}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le k_3\sum_{j=1}^{\infty}E\Big(W^{r-1}\sum_{j=1}^{\infty}|W_t^{(j)}|\Big)^{\frac{\alpha}{r}}<\infty.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$,

$$\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{m}|c^jY_t^{(j)}|>(1-\varepsilon)x]}{P[|Z_1|>x]}+\frac{P[\sum\limits_{j=m+1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>\varepsilon x]}{P[|Z_1|>x]}.$$

由推论 2.4 和 (2.13) 得

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|c^jY_t^{(j)}|>x]}{P[|Z_1|>x]}\le(1-\varepsilon)^{-\alpha}\sum_{j=1}^{m}E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big)+\varepsilon^{-\alpha}k\sum_{j=1}^{\infty}E\big(|W_t^{(j)}|^{\alpha}\big).$$

先让 $m \to \infty$, 然后让 $\varepsilon \to 0$ 得到

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P[\sum\limits_{j=1}^{\infty} |c^j Y_t^{(j)}| > x]}{P[|Z_1| > x]} \le \sum_{j=1}^{\infty} E(|W_t^{(j)}|^\alpha).$$

这样就完成了定理的证明.

3　收敛性质

在该部分, 我们将研究与一类双线性时间序列模型有关的点过程序列的极限行为. 假定 $\{X_t\}$ 是方程 (1.1) 的一稳定解，其中 $\{Z_t\}$ 是带有正规变化尾概率的独立同分布随机变量列. 相似于第四部分的 c 满足的条件

$$|c|^{\alpha/2} E|Z_1|^{\alpha/2} < 1. \tag{3.1}$$

在该条件下，方程 (1.1) 存在唯一的平稳解为 (2.6), 即

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c^j Y_t^{(j)}.$$

这里

$$Y_t^{(j)} = \begin{cases} Z_t, & j = 0, \\ Z_{t-jk} \prod\limits_{i=0}^{j-1} Z_{t-ik-l}, & j \ge 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

该部分我们感兴趣的东西是基于 $\{a_n^{-1} X_t,\ t = 1, \cdots\}$ 的点过程序列，其中 a_n 是 $(1 - \frac{1}{n})$ 分位数. 也就是说

$$a_n = \inf\left\{x : P[|Z_1| > x] \le \frac{1}{n}\right\} \tag{3.3}$$

在讨论有关极限理论前, 我们很快会注意到点过程理论的凸事实. 对于一局部紧的 Hausdorff 拓扑空间 E, 设 $\boldsymbol{M}_p(E)$ 是 E 上的 Radon 点测度，这就意味着 $m \in \boldsymbol{M}_p(E)$, 那么 $m = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{x_i}$, 其中 $x_i \in E$ 是 m 的质点的位置， ε_{x_i} 是点测度，定义为

$$\varepsilon_{x_i}(B) = \begin{cases} 1, & 若\ x_i \in B, \\ 0, & 若\ x_i \bar{\in} B. \end{cases}$$

特别指出，假定 $\boldsymbol{M}_p(E)$ 里的所有测度是 Radon 测度，即对于任意的 $m \in \boldsymbol{M}_p(E)$ 和任意的紧集 $K \subset E$, 均有 $m(K) < \infty$. 在空间 $\boldsymbol{M}_p(E)$ 上我们用模糊度量 $\rho(\cdot,\cdot)$[14]. 注意到测度列 $m_n \in \boldsymbol{M}_p(E)$ 模糊收敛到 $m_0 \in \boldsymbol{M}_p(E)$, 是指对于任意有紧支撑的连续函数 $f: E \to [0,\infty)$, 均有 $m_n(f) \to m_0(f)$, 其中 $m_n(f) = \int_E f dm_n$, 有非负紧支撑的连续函数记为 $C_K^+(E)$.

引理 3.1[6] 假定独立同分布序列 $\{Z_t\}$ 的边缘分布 F 满足 (1.2), (1.4), 并且 m 是一固定的正整数. 进一步假定 $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_s}$ 是 PRM(μ), 这里 $\mu(dx)=\alpha(px^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{[x>0]}+q(-x)^{-\alpha-1}\mathbf{1}_{[x<0]})dx$, 而且 $\{U_{kl},U'_{kl},\ k\geq 1,\ l\geq 1\}$ 是独立同分布随机变量列, 具有同分布 F. 若 $e_i\in[-\infty,\infty]^m$ 定义为第 i 个分量等于 1, 其余分量为 0 的基元. 而且 $E_m=[-\infty,\infty]^m\backslash\{0\}$, 那么在 $\boldsymbol{M}_p(E\times[-\infty,\infty]^m)$ 上有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{(a_n^{-1}(Z_{t-i},i=1,\cdots,m),\,Z_{t-j},\,j=1,\cdots,m)}\\
\Longrightarrow&\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{(j_se_1,\,sgn(j_s)\infty,\,U'_{s1},\cdots,U'_{s,m-1})}+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{(j_se_2,\,U_{s1},\,\mathrm{sgn}(j_s)\infty,\,U'_{s1},\cdots,U'_{s,m-2})}\\
&+\cdots+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{(j_se_m,\,U_{s,m-1},\cdots,U_{s1},\,\mathrm{sgn}(j_s)\infty)}.
\end{aligned}
$$

现在对于 $j=1,\cdots,m$, 考虑定义在空间 $E_1:=[-\infty,\infty]\backslash 0$ 上的点过程

$$
I_n^j=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{a_n^{-1}Y_t^{(j)}},
$$

其中 $Y_t^{(j)}$ 在 (3.2) 中已定义过. 我们首先证明在 $\boldsymbol{M}_p^m(E_1)$ 上, $(I_n^1,\cdots,I_n^m)$ 的联合收敛性.

命题 3.2 在引理 3.1 的假定下, 在空间 $\boldsymbol{M}_p^m(E_1)$ 上, 我们有

$$
(I_n^1,\cdots,I_n^m)\Longrightarrow(I^1,\cdots,I^m),
$$

其中 $I^j=\sum\limits_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_s(U_{s,1}\cdots U_{s,j})}$.

证 对于 $j=1,\cdots,m$,

$$
g(x_1,\cdots,x_m,u_1,\cdots,u_m)=(x_j,u_1,\cdots,u_j)
$$

是 $E_m\times[-\infty,\infty]^m\xrightarrow{g}E_1\times[-\infty,\infty]^j$ 上的连续映射, 并且对于每个紧子集 $K\subset E_1\times[-\infty,\infty]^j$, $g^{-1}(K)$ 是紧的. 因此, 映射 g 就诱导出一个 $\boldsymbol{M}_p(E_m\times[-\infty,\infty]^m)\to\boldsymbol{M}(E_1\times[-\infty,\infty]^j)$ 的连续映射.

$$
\widetilde{I}_n^j:=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{(a_n^{-1}Z_{t-jk},Z_{t-l},Z_{t-k-l},\cdots,Z_{t-(j-1)k-l})}\Longrightarrow\widetilde{I}^j:=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{(j_s,U_{s,1},\cdots,U_{s,j})},\tag{3.4}
$$

其中收敛是联合的 (对 $j=1,\cdots,m$). 若 M 和 $-M$ 是 F 的连续点, 那么这种收敛对于限制在集合 $E_1\times[-M,M]^j$ 上也成立. 也就是说在集合 $\boldsymbol{M}_p^m(E_1\times[-\infty,\infty]^j)$ 上

$$
I_n^{j,M}(\cdot):=\widetilde{I}_n^j(\cdot\cap(E_1\times[-\infty,\infty]^j))\Longrightarrow I^{j,M}(\cdot):=\widetilde{I}^j(\cdot\cap(E_1\times[-\infty,\infty]^j)).\tag{3.5}
$$

现考虑映射

$$
f_j(x,u_1,\cdots,u_j)=\begin{cases}xu_1u_2,\cdots u_j, & \text{若 } \bigvee_{i=1}^{j}|u_i|<\infty,\\ 8, & \text{否则}.\end{cases}
$$

注意到 紧集，形为 $\{x:|x|\geq b\}$

$|x|>$, 而后者在集合 $E_1\times[-$

意紧子 制到 $E_1\times[-M,M]^j$ 上是

乎处处 引理 1.4 和 (3.5) 知，在

$$\ldots,\widetilde{I}_n^{m,M}\circ f_m^{-1})\Longrightarrow(\widetilde{I}$$

由于点 $^{-1}$ 是定义好的泊松过程

几乎

$$\widetilde{I}^{1,M}\circ f_1^{-1},\cdots,\widetilde{I}^{m,M}\circ f_m^{-1}$$

显然 想得到命题的结论，只要

$$\limsup_{n\to\infty}P\big[\rho(\widetilde{I}^{j,M}\circ f_j^{-1}\qquad(3.6)$$

以证明对于任意的 $h\in C$

$$\limsup_{n\to\infty}P\big[|(\widetilde{I}^{j,M}\circ f_j^{-1}(h)$$

$G_\delta=\{x:|x|>\delta\}$, 那么 $(G_{\delta'}\times K_M^c)\geq 1]$ 控

是 $K_M:=[-M,M]^j$ (3.4), 这个概率

$\times K_M^c)\geq 1]$ 。

测度

$$\xrightarrow{P}0.$$

证 $\cdots\times($ 那么 B 或远离每个坐标

或 相交

$$E\Big[\sum_{t=1}\varepsilon\qquad\in B\Big]\longrightarrow 0.$$

题的其余 的推导一样.

定理 假定 中独立同分布噪

足 (1.4), 常数 给出. 若 $\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_s}$ 是 PRM(μ), 这里 μ 由引

3.1 给出, 且分布为 F, 那么

$$\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{a_n^{-1}X_t}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s}$$

这里

$$W_{s,j}=\begin{cases}\prod_{h=1}^{j}U_{s,h}, & 若\ j>0,\\ 1, & 若\ j=0\\ 0, & 若\ j<0.\end{cases}$$

(ii) 在 $\boldsymbol{M}_p(E_{h+1})$ 里

$$\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{a_n^{-1}(X_t,X_{t-1},\cdots,X_{t-h})}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_s(c^jW_{s,j},c^{j-1}W_{s,j-1},\cdots,c^{j-h}W_{s,j-h})}.$$

证 (i) 由命题 3.2 和命题 3.3 可推得，在 $\boldsymbol{M}_p(E_m)$ 上

$$\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{a_n^{-1}(Y_t^{(1)},\cdots,Y_t^{(m)})}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_s(U_{s,1}\cdots U_{s,j})}e_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_sW_{s,j}e_j}.\tag{3.7}$$

现建立如下映射

$$(y_0,y_1,\cdots,y_m)\longrightarrow\sum_{j=0}^{m}c^jy_j.$$

那么就诱导出一个 $\boldsymbol{M}_p(E_{m+1})\longmapsto\boldsymbol{M}_p(E_1)$ 的连续映射，将连续映射定理应用到 (3.7) 的收敛上，我们得到在 $\boldsymbol{M}_p(E_1)$ 里

$$\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{a_n^{-1}\sum_{j=0}^{m}c^jy_t^{(j)}}\Longrightarrow\sum_{j=0}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_sc^jW_{s,j}}.$$

随着 $m\to\infty$, 逐点以模糊测度

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_sc^jW_{s,j}}\longrightarrow\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{j_sc^jW_{s,j}}.$$

由 Billingsley[17] 的引理 4.2, 足以证明对于任意的 $\eta>0$ 和 $f\in C_K^+(E_1)$

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}P\Big[\Big|\sum_{t=1}^{n}f(a_n^{-1}\sum_{j=0}^{m}c^jY_t^{(j)})-\sum_{t=1}^{n}f(a_n^{-1}X_t)\Big|>\eta\Big]=0.\tag{3.8}$$

要证明 (3.8), 结合推论 2.5, 随着 $m\to\infty$,

$$\begin{aligned}&P\Big[a_n^{-1}\bigvee_{t=1}^{n}\Big|\sum_{j=0}^{m}c^kY_t^{(j)}-X_t\Big|>\eta\Big]\\ \le&P\Big[a_n^{-1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|c^j||Y_t^{(j)}|>\eta\Big]\\ \le&nP\Big[a_n^{-1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|c^j||Y_t^{(j)}|>\eta/2\Big]\end{aligned}$$

$$\longrightarrow (\eta/2)^{-\alpha} \sum_{j=m+1}^{\infty} |c|^{j\alpha} \left(E|Z_1|^{\alpha}\right)^j$$
$$\longrightarrow 0.$$

(3.8) 的证明的其余部分和 [16] 的 (2.11) 的证明一样.

(ii) 我们将刻画 $h=k$ 的场合下的证明，一般情形是 $h=s$ 场合下的直接推广. 首先注意到 $Y_t^{(j)} = Z_{t-(j-1)k-l} Y_{t-k}^{(j-1)}$, 因此

$$\begin{aligned}&(Y_t^{(1)},\cdots,Y_t^{(m)},Y_{t-k}^{(1)},\cdots,Y_{t-k}^{(m-1)})\\ =&(Y_t^{(1)}, Z_{t-(j-1)k-l}(Y_{t-k}^{(1)},\cdots,Y_{t-k}^{(m-1)}), Y_{t-k}^{(1)},\cdots,Y_{t-k}^{(m-1)}).\end{aligned}$$

由命题 3.2 和命题 3.3 的推论作一简单修改，我们得到在 $\boldsymbol{M}_p(E_{2m-1})$ 空间里

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{a_n^{-1}(Y_t^{(1)},\cdots,Y_t^{(m)},Y_{t-k}^{(1)},\cdots,Y_{t-k}^{(m-1)})} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_{j_s(W_{s,j}e_j+W_{s,j-1}e_{m+j-1})},$$

其中 e_i 是 R^{2m+1} 的基元，由映射

$$(x_1,\cdots,x_m,u_1,\cdots,u_{m-1}) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{m} c^j x_j, \sum_{j=1}^{m-1} c^j u_j\right)$$

诱导出 $\boldsymbol{M}_p(E_{2m-1}) \longmapsto \boldsymbol{M}_p(E_2)$ 的连续映射，得到

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_{a_n^{-1}(\sum_{j=1}^{m} c^j Y_t^{(j)}, \sum_{j=1}^{m-1} c^j Y_{t-1}^{(j)})} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_{j_s(c_j W_{s,j}+c^{j-1}W_{s,j-1})}.$$

剩余的证明同 (i).

参 考 文 献

[1] Mohler R R. Bilinear Control Process. New York: Academic Press, 1973

[2] Granger C W J, Andersen A P. An Introduction to Bilinear Time Series Models. Gottinggen: Vandenhock and Ruprecht, 1978

[3] Subba R T. On the Theory of Bilinear Time Series Models. *J. R. Statist. Soc.* (Series B), 1981, 43(2): 244–255

[4] Pham D T, Tran. On the First-order Bilinear Time Series Model. *J. of Appl. Prob.*, 1981, 18: 617–627

[5] Akamanam S I, Bhaskara R M, Subramanyam K. On the Ergodicity of Bilinear Time Series Models. *J. Time Ser. Anal.*, 1986, 7(3): 157–163

[6] Davis R A, Resnick S. Limit Theory for Bilinear Processes with Heavy Tailed Noise. *Annals of Applied Probability*, 1996, 6(4): 1191–1210

[7] Feller W. Probability Theory and its Applications (2nd ed.) Beijing: Science Press, 1994

[8] Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications 2, 2nd ed. New York: Wiley, 1971

[9] Sidney Resnick. Point Process, Regular Variation and Weak Convergence. *Adv Appl Prob.*, 1986, 18: 66–138

has ... b

of T ... n

Liu J ... ki

341–

Brei ... S

10: 3

Prat ... c

] Sidn

1987

5] Cline ... t

Varia

8052 ... 3

[16] Davis ... i

Tail ... e

[17] Billin ... C

b

Abstract ... r

which exh ... a

atasets f ... e

ompatibl ... n

ften used ... e

linear m ... X

ariables

tisfies ce

der the

given by ... a

ey word ... n

R(2000 ... n

inese ... a