山西大学学报(自然科学版) 31(2): 163～166, 2008
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

文章编号: 0253-2395(2008)02-0163-04

ARCH 序列部分和的矩不等式*

张志强[1], 刘维奇[2], 张日权[1]
(1. 山西大同大学 数学与计算机科学学院, 山西 大同 037009;
2. 山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘　要: 在论证了ARCH 模型绝对值序列是一两两PQD (Positively Quadrant Dependent)序列的基础上, 给出了ARCH 模型绝对值序列部分和的一个矩不等式; 同时根据ARCH 序列是鞅差序列、正交序列, 给出了其他若干ARCH 序列部分和的矩不等式.

关键词: ARCH; 部分和; 矩不等式

中图分类号: O211　　**文献标识码**: A

0　引言

ARCH 模型(Autoregressive conditional heteroskedasticity)是Engle[1]提出的. 模型如下.

设$\{x_t\}$～ARCH(1), 即

$$x_t = v_t(\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2)^{1/2},\ -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

其中$\{v_t\}$是i.i.d., 且$Ev_t = 0, Var(v_t) = 1, v_t$独立于$x_{t-s}, s > 0; \alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$.

ARCH 序列是指服从模型(1)的序列$\{x_t, t \in Z\}$.

这一模型的提出, 不仅是时间序列分析理论方面的重大发展, 而且具有广泛的应用价值, 所以受到越来越多的重视. 许多文献研究了ARCH 模型各方面的性质. Davis 等[2]用点过程的技巧建立了ARCH 过程中的平方序列和绝对值序列的样本自协方差函数和自相关函数的极限理论, Giraitis 等[3]讨论了ARCH 模型的相依结构和中心极限定理, Giraitis[4]给出了ARCH 模型的Whittle 估计, Hall 等[5]研究了ARCH 模型的统计推断, Kokoszka 等[6]讨论了ARCH 模型的变点估计. 关于部分和的矩不等式, 文献中很少看到有关对ARCH 序列在这方面的研究. 本文将在ARCH 序列具有的两两PQD (Positively quadrant dependent)性、鞅差性、正交性的基础上给出ARCH 序列部分和的若干矩不等式.

下面的一些定义和引理将在定理的证明中用到.

定义1[7]　称随机变量X与Y为PQD (Positively quadrant dependent)的, 若对$\forall x, y \in R$成立

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

称r.v.序列$\{X_i: i \in N\}$为两两PQD 序列, 若对$\forall i \neq j, X_i$与X_j为PQD 的.

引理1[8]　设$\{X_i: i \geq 1\}$为均值为零的两两PQD 序列, 则

$$E\max_{1\leq j\leq n}(S_{a+j} - S_a)^2 \leq \left(\frac{\log(2n)}{\log 2}\right)^2 E(S_{a+n} - S_a)^2,$$

其中$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

引理2　设$\{X_i\}$为鞅差序列, 则

* 收稿日期: 2006-11-07; 修回日期: 2007-06-13
基金项目: 山西省自然科学基金(2007011014)
作者简介: 张志强(1969-), 男, 山西大同人, 硕士, 助教. 研究方向: 时间序列分析和非参数统计.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$E\left|S_n\right|^r \le C_r n^{\frac{r}{2}-1}\sum_{i=1}^{n} E\left|X_i\right|^r,$$

其中$C_r=\{8(r-1)\max(1,2^{r-3})\}^r$.

引理3 设$\{X_i\}$为鞅差序列,则对任意$p>1$,存在正的常数$a_p\le b_p$和$a_p'\le b_p'$使得

$$a_p E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{p/2} \le E\left|S_n\right|^p \le b_p E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{p/2};$$

$$a_p' E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2\right)^{p/2} \le \sup_{n\ge1} E\left|S_n\right|^p \le b_p' E\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2\right)^{p/2}.$$

引理4 设$\{S_n, \mathbf{F}_n\}$为鞅,则

$$E\left\{\max_{1\le i\le n}\left|S_i\right|\right\} \le \frac{e}{e-1}\left(1+E\left|S_n \log^+ S_n\right|\right),$$

$$E\left\{\sup_{n\ge1}\left|S_n\right|\right\} \le \frac{e}{e-1}\left(1+\sup_{n\ge1} E\left|S_n \log^+ S_n\right|\right).$$

又对$p>1$,

$$E\left\{\max_{1\le i\le n}\left|S_i\right|^p\right\} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left|S_n\right|^p,$$

$$E\left\{\sup_{n\ge1}\left|S_n\right|^p\right\} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{n\ge1} E\left|S_n\right|^p.$$

引理5 若$\{X_j\}$是正交r. v. 列,则

$$E\left(\max_{1\le j\le n}\left|S_{a+j}-S_a\right|\right)^2 \le \left(\log(2n)/\log 2\right)^2 \sum_{j=a+1}^{a+n} EX_j^2.$$

1 定理及证明

定理1 若$\{x_t\}\sim \mathrm{ARCH}(1)$,记$x_t^*=\left|x_t\right|-Ex_t, S_n^*=\sum_{k=1}^{n} x_k^*$,则

$$E\max_{1\le j\le n}\left(S_{a+j}^*-S_a^*\right)^2 \le \left(\frac{\log(2n)}{\log 2}\right)^2 E\left(S_{a+n}^*-S_a^*\right)^2. \tag{2}$$

证明: 将方程(1)式两边自乘一下变为

$$x_t^2 = v_t^2\left(\alpha_0+\alpha_1 x_{t-1}^2\right), \tag{3}$$

进一步递推对任何$s<t$有

$$x_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{t-s-1} \alpha_1^j \prod_{i=0}^{j} v_{t-i}^2 + \alpha_1^{t-s}\left(\prod_{k=0}^{t-s-1} v_{t-k}^2\right) x_s^2. \tag{4}$$

记

$$\eta_t^{(j)} = \alpha_1^j \prod_{i=0}^{j} v_{t-i}^2, j=0,1,\cdots, \tag{5}$$

我们得到

$$P\left(\left|x_t\right|>y \,\middle|\, \left|x_s\right|=x\right) = P\left(x_t^2>y^2 \,\middle|\, x_s^2=x^2\right) = P\left(\alpha_0 \sum_{j=0}^{t-s-1} \eta_t^{(j)} + \alpha_1 x^2 \eta_t^{(t-s-1)} > y^2\right). \tag{6}$$

由于$\eta_t^{(t-s-1)}$的非负数,从而这是一个在$[0,\infty)$上的关于x的非降函数

下面我们证明若$\{x_t\}\sim\mathrm{ARCH}(1)$,对任意的$s<t$,对任何非降的双变量函数$f(u,v)$和$g(u,v)$,其中$Ef^2(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|)<\infty, Eg^2(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|)<\infty$,都有

$$Cov\left(f\left(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|\right), g\left(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|\right)\right) \ge 0. \tag{7}$$

令E_x和Cov_x表示在给定$\left|x_s\right|=x$的条件下相应的条件期望和条件协方差,那么

$$\begin{aligned}&Cov\left(f\left(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|\right), g\left(\left|x_s\right|,\left|x_t\right|\right)\right) = \\ &E(f\cdot g) - E(f)\cdot E(g) = \\ &E\left(E_x(fg)\right) - E\left(E_x f\right)\cdot E\left(E_x g\right) =\end{aligned}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$E\{E_x(fg)-E_xf\cdot E_xg\}+E\{E_xf\cdot E_xg\}-E(E_xf)\cdot E(E_xg)=$$
$$E\{Cov_x(f,g)\}+Cov\{E_xf,E_xg\}.$$

而$Cov_x(f,g)=Cov(f(x,|x_t|),g(x,|x_t|))\geq 0$. 所以只要证明了$Cov(E_xf,E_xg)\geq 0$就完成了证明. 根据(6)式, 对任何固定的$y\geq 0$, $P(|x_t|>y\,|x_s=x)$关于x非降, 对任何$z\geq 0$, $P(f(x,|x_t|)>z\,||x_s=x)$是一个在$[0,\infty)$上的关于x的非降函数, 这样的话, E_xf和E_xg也关于x非降. 那么

$$Cov(E_xf,E_xg)\geq 0,$$

从而(7)式成立. 因此有如下推论

对任何$s<t$, 任何非降函数$f(u)$和$g(v)$, 其中$Ef^2(|x_s|)<\infty$和$Eg^2(|x_t|)<\infty$, 对于ARCH(1)序列有

$$Cov(f(|x_s|),g(|x_t|))\geq 0.$$

令$f(u)=I_{(x,+\infty)}(u)$, $g(v)=I_{(y,+\infty)}(v)$, 我们得到对任意的$s<t$和任意的$x,y\in R$, 有

$$P(|x_s|>x,|x_t|>y)\geq P(|x_s|>x)P(|x_t|>y)$$

和

$$P(|x_s|\leq x,|x_t|\leq y)\geq P(|x_s|\leq x)P(|x_t|\leq y).$$

由此可见$\{x_t^*\}$是一个两两PQD序列. 根据引理1可知(2)式成立.

定理2 若$\{X_t\}\sim$ARCH(1), $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 则

$$E|S_n|^r\leq C_rn^{\frac{r}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^r, \tag{8}$$

其中$C_r=\{8(r-1)\max 1,2^{r-3}\}^r$.

对任意$p>1$, 存在正的常数$a_p\leq b_p$和$a_p'\leq b_p'$使得

$$a_pE\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^{p/2}\leq E|S_n|^p\leq b_pE\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^{p/2},$$
$$a_p'E\left(\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2\right)^{p/2}\leq\sup_{n\geq 1}E|S_n|^p\leq b_p'E\left(\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2\right)^{p/2} \tag{9}$$

且

$$E\left\{\max_{1\leq i\leq n}|S_i|\right\}\leq\frac{e}{e-1}(1+E|S_n\log^+S_n|),$$
$$E\left\{\sup_{n\geq 1}|S_n|\right\}\leq\frac{e}{e-1}(1+\sup_{n\geq 1}E|S_n\log^+S_n|).$$

又对$p>1$,

$$E\left\{\max_{1\leq i\leq n}|S_i|^p\right\}\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^pE|S_n|^p,$$
$$E\left\{\sup_{n\geq 1}|S_n|^p\right\}\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{n\geq 1}E|S_n|^p \tag{10}$$

和

$$E\left(\max_{1\leq j\leq n}|S_{a+j}-S_a|\right)^2\leq(\log(2n)/\log 2)^2\sum_{j=a+1}^{a+n}EX_j^2. \tag{11}$$

证明: 由(1)式可知, $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=0$且$EX_iX_j=0$, 对$i\neq j$. 所以$\{X_n,n\geq 1\}$是鞅差序列, 正交r.v.列, 根据引理2-引理5, (8)-(11)式成立.

参考文献:

[1] ENGEL R F. Autoregressive Conditional Heteroskedastic Models with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation[J]. *Econometrica*, 1982, **50**: 987-1007.

[2] DAVIS R A, MIKOSCH T. The Sample Autocorrelations of Heavy-tailed Processes with Applications to ARCH[J]. *Applications of Statistics*, 1998, **26**: 2049-2080.

[3] GIRAITIS L, KOKOSZKA P, LEIPUS R. Stationary ARCH Models: Dependence Structure and Central Limit Theorem

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[J]. *Econometric Theory*, 2000, **16**: 3-22.

[4] GIRAITIS L, ROBINSON P M. Whittle Estimation of ARCH Models[J]. *Econometric Theory*, 2001, **17**: 608-623.

[5] HALL P, YAO Q. Inference in ARCH and GARCH Models with Heavy-tailed Errors[J]. *Econometrica*, 2003, **71**: 285-317.

[6] KOKOSZKA P, LEIPUS R. Change-point Estimation in ARCH Models[J]. *Bernouli*, 2000, **6**: 513-539.

[7] LEHMANN E L. Some Concepts of Dependence[J]. *Ann Math Statist*, 1966, **43**: 1137-1153.

[8] **陆凤彬 两两**PQD**序列的完全收敛性和强大数定律**[J]. **应用数学**, 2003, **16**(4): 29-33.

[9] OLAV KALLENBERG. Foundations of Modern Probability[M]. New York: Springer, 2001.

Some Moment Inequality of Partial Sum of ARCH Sequence

ZHANG Zhi-qiang[1], LIU Wei-qi[2], ZHANG Ri-quan[1]

(1. *School of Mathematical and Computer Sciences, Shanxi Datong University, Datong* 037009, *China*;

2. *School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: A moment inequality of partial sum of the ARCH absolute value sequences is given based on the positively quadrant dependence of random variables from ARCH absolute value sequences, and some other moment inequality of partial sum of the ARCH sequences were given by the property of orthogonality and martingale difference of random variables from ARCH.

Key words: ARCH; Partial sum; moment inequality

作者文摘的编写

文摘是以提供文献内容梗概为目的、不加评论和补充解释, 简要明确地记叙文献重要内容的独立短文. 其基本要素包括研究的目的、方法、结果、结论, 具有独立性和自明性.

①目的——研究、研制、调查等的前提、目的和任务所涉及的主题范围.

②方法——所用的原理、理论、条件、对象、材料、工艺、结构、手段、装备、程序等.

③结果——实验的、研究的结果、数据, 被确定的关系, 观察结果, 得到的效果, 性能等.

④结论——结果的分析、研究、比较、评价、应用, 提出的问题, 今后的课题, 假设, 启发, 建议, 预测等.

⑤其他有价值的重要信息.

文献可分为报道性文摘、报道/指示性文摘和指示性文摘, 作者文摘一般要写成前两种, 字数在400字左右为宜, 且对结果、结论宜写得详细, 并将列述的创新点用黑体字打印(或用下划线标示).

摘要的作用:

文摘具有重要的引导价值. 首先, 摘要是影响文献被检索和引用的重要因素. 其次摘要为读者快捷准确地了解论文的主要内容提供了方便.

编写文摘的注意事项:

①要客观如实地反映一次文献, 切不可加进作者的主观见解、解释或评论.

②要着重反映新内容和作者特别强调的观点.

③要排除本学科领域已成常识的内容, 不得简单重复题名和引言中已有的信息.

④要用第三人称写法, 应采用"对……进行了研究"、"报告了……现状"、"进行了……调查"等记述方法. 对一次文献的主题、内容、性质、水平做出客观、准确、简明的描述, 要求结构严谨, 层次分明, 表达准确, 言简意赅, 没有歧义. 书写要合乎语法、逻辑关系, 要采用规范化的科学技术名词术语, 对新术语、缩略语等在首次出现时应加以说明.

⑤文摘不用非公知公用的术语和符号, 不用数学公式和化学结构式, 不用引文和图表.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net