第25卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 25 No. 6
2008年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2008

文章编号:1005-3085(2008)06-1133-04

带随机干扰更新风险模型破产概率的局部定理*

张宇玉, 刘维奇

(山西机电职业技术学院数学系，山西 长治 046011)

摘 要: 为推广经典风险过程以研究各种风险引发的破产的可能性，本文研究了保险金融领域中一个更为现实的模型：带随机干扰的更新风险模型的破产概率的渐近估计的局部化形式。在相对安全负荷条件下，采用纯概率的方法，得出了当索赔额为重尾索赔时破产概率的局部渐近等价式，它与原更新风险模型相应的破产概率的局部渐近等价式一致，说明在重尾索赔下，Wiener过程对破产概率的影响可以忽略。

关键词: 破产概率的局部定理；更新风险模型；布朗运动

分类号: **AMS**(2000) 62P05; 62E20 **中图分类号**: O211.3 **文献标识码**: A

1 引言

更新模型是现代精算风险理论中最基本的模型之一，其定义如下：

(i) 索赔额序列 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是一个非负的独立同分布(i.i.d.)随机变量序列(r.v.s)，具有共同的（非格子点）分布 F，有限期望 $\mu = EX_1$，方差 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) \leq \infty$。

(ii) 两次索赔额之间的时间间隔 $\{\theta_n, n \geq 1\}$ 也构成一个非负的 i.i.d. 的 r.v.s，具有共同分布 G 和有限期望 $E\theta_i$，且与 $\{X_i, i \geq 1\}$ 独立。

(iii) 第 n 次索赔出现的时间为 $T_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$，由 T_n 构成更新过程 $N(t)$

$$N(t) = \sup\{n : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

(iv) 到时刻 t 为止的理赔总额过程 $\{M(t), t \geq 0\}$ 定义为 $M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0$。

如果上述定义中的时间间隔 $\{\theta_i\}$, $i \geq 1$ 是服从指数分布的 i.i.d. 的 r.v.s，因而 $N(t)$ 是齐次Poisson过程，则相应的更新模型称为Cramér-Lundberg模型。

本文考虑的是Wiener过程干扰的更新模型下的风险过程 $\{U(t), t \geq 0\}$：

$$U(t) = x + ct - M(t) + \eta B(t),$$

其中 $x \geq 0$ 表示保险公司的初始资产，$0 < c < \infty$ 是常数，为保险费率，$\eta \neq 0$ 为常数，$\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准布朗运动，均值是0，方差为 $2D$。Wiener过程可视为保险公司管理或经营的偏差对其财务的影响。$\{N(t)\}$, $\{B(t)\}$ 与 $\{X_i\}$ 相互独立，并且假定相对安全负荷 $\rho = \frac{cE\theta_i - EX_i}{EX_i} > 0$，直观上，保险公司必须要求 $\rho > 0$，才能保证单位时间的保费收入比单位时间的理赔支出多，保险公司才能盈利。

在上述模型中破产概率定义为 $\psi(x) = P(\sup_{t \geq 0} S(t) > x)$，其中 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - ct - \eta B(t)$。为了本文的需要，假定索赔额 F 的支撑是 $R^+, F(0) = 0, F(x)$ 的平衡分布 $F_e(x) =$

收稿日期: 2006-09-27. **作者简介**: 张宇玉(1982年4月生)，女，硕士. 研究方向：时间序列分析.

*__基金项目__: 山西省自然科学基金(20031005).

$1/\mu\int_0^x \overline{F}(t)\mathrm{d}t$，其中 $\overline{F}(t)=1-F(t)$, F^{*n} 是 F 的 n 重卷积。$R(x)=1-\psi(x)$ 为生存概率，记 $R(x,x+z]=R(x+z)-R(x)$。本文的主要结果是在带随机干扰更新模型下对生存概率建立了局部渐近等价关系，即研究在 $x\to\infty$ 时，$R(x,x+z]$ 的渐近性态。结果表明：在大额索赔场合，Wiener 过程对破产概率的影响可以忽略不计。

2 预备知识

1.1 重尾分布定义

S 族：F 满足：$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{\overline{F}(x)}=n$。 **$L$ 族**：F 满足：$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1$。

S^* 族：F 满足：$\int_0^x\overline{F}(x-y)\overline{F}(y)\mathrm{d}y\sim 2\mu\overline{F}(x)$。

这些分布间的关系是 $S^*\subset S\subset L$。

1.2 阶梯高度的分布

引入与更新风险过程 $\sigma(t)=M(t)-ct$ 相关的几个重要变量。

(a) 阶梯增高时刻 $\tau_n:\tau_n=\inf\{t\ge 0:\sigma(t)>\sigma(\tau_{n-1})\}$。

为方便计，若 $\sup_{t\ge\tau_{n-1}}\sigma(t)<\sigma(\tau_{n-1})$，定义 $\tau_n=\infty$，且 $\sigma(\tau_0)=\sigma(0)=0$。

(b) 阶梯高度 $L_n:L_n=\sigma(\tau_n)-\sigma(\tau_{n-1})$, $n\ge 1$。

若 $\tau_n=\infty$，则定义 $L_n=\infty$, $\sigma(\tau_0)=\sigma(0)=0$。

与此相应，还需定义弱阶梯减高时刻和弱阶梯降度

$$\tau_n^-=\inf\{T_n\ge 0:\sigma(T_n)\le\sigma(\tau_{n-1}^-)\},\quad n\ge 1;$$
$$L_n^-=\sigma(\tau_{n-1}^-)-\sigma(\tau_n^-),\quad n\ge 1.$$

这里 $\sigma(\tau_0^-)=\sigma(0)=0$。由文[1]知在更新模型中，$\{(\tau_i,L_i)\},\{(\tau_i^-,L_i^-)\}$ 是独立同分布的二元随机序列，若 H 表示 L_i 的分布函数，则 $q=P(L=\infty)=\frac{cE\theta_1-\mu}{EL_1^-}>0$，$\overline{H}(x)\sim\frac{\mu}{EL_1^-}\overline{F_e}(x)$。定义 H 的标准分布为 $H_s(x)=\frac{H(x)}{1-q}$, $0<x<\infty$

1.3 相关引理

引理1.3.1 在具有相对安全条件 $\rho>0$ 的更新模型下，如果非格子点的索赔额分布 $F\in S^*$，则对于任意的 $z>0$ 和任意的 $n\in N$，有

$$H_s^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{(1-q)EL_1^-}\overline{F}(x).$$

证明 由文献[2]中的引理3得

$$H_s^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{(1-q)EL_1^-}P(X_1-c\theta_1>x),$$

而

$$\begin{aligned}P(X_1-c\theta_1>x)&=\int_0^\infty\mathrm{d}G(t)\int_{x+ct}^\infty\mathrm{d}F(X_1)=\int_0^\infty\mathrm{d}G(t)\int_x^\infty\mathrm{d}F(X_1+ct)\\&=\int_0^\infty F(X_1+ct)|_x^\infty\mathrm{d}G(t)=\int_0^\infty(1-F(x+ct))\mathrm{d}G(t)=\overline{F}(x)\int_0^\infty\frac{\overline{F}(x+ct)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}G(t),\end{aligned}$$

由 $F\in L$ 及控制收敛定理得 $P(X_1-c\theta_1>x)\sim\overline{F}(x)$，得证。

引理1.3.2[2] 设 H_1, H_2 是 $(0,\infty)$ 上的分布函数，且对 $\forall z>0$，$H_1(x,x+z]\sim d_1z\overline{F}(x)$，$H_2(x,x+z]\sim d_2z\overline{F}(x)$，则有 $(H_1*H_2)(x,x+z]\sim(d_1+d_2)z\overline{F}(x)$，其中 d_1, d_2 为常数。

引理1.3.3[2] 设 $F\in S^*$，H 是 $(0,\infty)$ 上的分布函数，且对 $\forall z>0$，$H(x,x+z]\sim dz\overline{F}(x)$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$n\in N$，存在 C_ε，使得 $\sup_{x\geq 0}H^{*n}(x,x+z]/\overline{F}(x)\leq C_\varepsilon(1+\varepsilon)^n$，其中 d 为常数。

引理1.3.4[3] (i) 若 $F\in S$，则对 $(0,\infty)$ 上 y 的紧集一致有 $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1$。

(ii) 若上式成立，则对任意的 $\varepsilon>0$，当 $x\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{\varepsilon x}\overline{F}(x)\to\infty$。

引理1.3.5 设 $E(x)=1-\mathrm{e}^{(-c/D)x}$，其中 $D=\eta^2/2$，$F\in S^*$，则

$$E(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x)),\qquad E^{*(n+1)}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x)),\qquad E^{*n}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x)).$$

证明 先证 $E(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$

$$E(x,x+z]=E(x+z)-E(x)=1-\mathrm{e}^{(-c/D)(x+z)}-1+\mathrm{e}^{(-c/D)x}=\mathrm{e}^{(-c/D)x}(1-\mathrm{e}^{(-c/D)z}),$$

由引理1.3.4知，由于 $F\in S^*$，则 $\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{(c/D)x}\overline{F}(x)=\infty$，故有 $E(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$。

下面证明 $E^{*(n+1)}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$。

显然，$E^{*(n+1)}(x)=\int_0^x\frac{(c/D)^{n+1}y^n}{n!}\exp\{-(c/D)y\}\mathrm{d}y$，其中 $D=\eta^2/2$，因此

$$\begin{aligned}E^{*(n+1)}(x,x+z]&=E^{*(n+1)}(x+z)-E^{*(n+1)}(x)=\int_x^{x+z}\frac{(c/D)^{n+1}y^n}{n!}\exp\{-(c/D)y\}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{n!}\int_{c/D}^{c/D(x+z)}t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\Big\{\Big[\Big(\frac{c}{D}x\Big)^n\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}x}+\cdots+\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}x}\Big]\\&\quad-\Big[\Big(\frac{c}{D}(x+z)\Big)^n\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}(x+z)}+\cdots+\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}(x+z)}\Big]\Big\}\\&\sim(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{D}z})\frac{(c/D)^n}{n!}x^n\exp(-cx/D).\end{aligned}$$

所以存在正常数 M, C，使得当 $x>M$ 时，有 $E^{*(n+1)}(x,x+z]\leq C\exp(-cx/D)$。

又 $F\in S^*\subset S$，由引理1.3.4有 $\lim_{x\to\infty}\exp(cx/D)\overline{F}(x)=\infty$。

同理可以证明 $E^{*n}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$，引理得证。

3 主要定理及证明

定理 考虑具有安全负荷条件 $\rho>0$ 的带干扰的更新风险模型，若非格子点的索赔额分布 $F\in S^*$，则对 $\forall z>o$，有 $R(x,x+z]\sim\frac{z}{\rho\mu}\overline{F}(x)$。

证明 由文[4]知，带干扰的经典 Cramér-Lundberg 风险模型的破产概率

$$\psi(x)=\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\overline{E^{*(n+1)}*F_e^{*n}}(x)=q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q)^n\overline{E^{*(n+1)}*F_e^{*n}}(x),$$

其中 $E(x)=1-\exp\{-2c/\eta^2\}$，$\rho=\frac{cE\theta_i-EX_i}{EX_i}$，$q=\frac{cE\theta_i-EX_i}{cE\theta_i}$。

类似可知带干扰更新模型的破产概率为：$\psi(x)=q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q)^n\overline{E^{*(n+1)}*H_s^{*n}}(x)$，由引理1.3.5知，$E(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$，$E^{*(n+1)}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$，$E^{*n}(x,x+z]\sim o(\overline{F}(x))$，由引理1.3.1及1.3.2知，

$$E*H_s^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{(1-q)EL_1^-}\overline{F}(x),\qquad E^{*n}*H_s^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{(1-q)EL_1^-}\overline{F}(x),$$
$$E^{*(n+1)}*H_s^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{(1-q)EL_1^-}\overline{F}(x).$$

由于

$$\begin{aligned} E^{*(n+1)} * H_s^{*n}(x, x+z] &= \int_0^{x+z} E^{*n} * H_s^{*n}(x-y, x-y+z]\mathrm{d}E(y) \\ &= \Big(\int_0^x + \int_x^{x+z}\Big) E^{*n} * H_s^{*n}(x-y, x-y+z]\mathrm{d}E(y), \end{aligned}$$

由引理1.3.3知

$$E^{*(n+1)} * H_s^{*n}(x, x+z] \le \int_0^x C(1+\varepsilon)^n \overline{F}(x-y)\mathrm{d}E(y) + E(x+z) - E(x). \qquad (*)$$

而 $\overline{F*E}(x) \sim \overline{F}(x)$, $E(x, x+z] \sim o(\overline{F}(x))$，所以

$$R(x, x+z] = \psi(x) - \psi(x+z) = q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q)^n E^{*(n+1)} * H_s^{*n}(x, x+z].$$

在 $(*)$ 式中选取 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $(1-q)(1+\varepsilon) < 1$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q)^n E^{*(n+1)} * H_s^{*n}(x, x+z]}{\overline{F}(x)} \le C,$$

利用引理1.3.1和控制收敛定理并将 q 的表达式代入得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(x, x+z]}{\overline{F}(x)} = q\sum_{n=1}^{\infty}(1-q)^n\frac{nz}{(1-q)EL_2^-} = \frac{z}{\rho\mu}.$$

定理得证。

参考文献：

[1] 江涛，陈宜清. 平稳更新模型下生存概率的一个局部等价式[J]. 中国科学A辑，2004, 34(4): 385-391

[2] Asmussen S, *et al.* A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails[J]. Statistics Probability Letters, 2002, 56: 399-404

[3] Embrechts P, *et al.* Modelling Extremal Events for Insuarance and Finance[M]. Berlin: Springer, 1997

[4] 胡峰，宗昭军. 带随机干扰经典风险模型破产概率的局部定理[J]. 曲阜师范大学学报，2006, 32(1): 19-21

A Local Theorem for Ruin Probabilities in the Renewal Risk Model Perturbed by Diffusions

ZHANG Yu-yu, LIU Wei-qi

(Department of Mathematics, Shanxi Mechanical and Electronic Technique School, changzhi Shanxi 046011)

Abstract: In order to extend the classical risk process to study the possibility of ruin due to various risks, we study the local form of asymptotic estimate for probability in the perturbed renewal risk model which is a more realistic model in insurance and finance. We assume that the relative safety loading condition holds and obtain the asymptotic expression for local ruin probability by using the pure probability method with heavy-tailed claim size, which coincides with that for the corresponding local ruin probability in the renewal risk model. So the influence of the Wiener process can be neglected when the claim size is heavy-tailed.

Keywords: local theorem for ruin probability; renewal risk model; Brownian motion