**山西大学学报(自然科学版)** 31(3): 318~322, 2008
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

**文章编号**: 0253-2395(2008)03-0318-05

# 带正则变化尾误差的函数系数自回归模型的概率性质*

**王耀青***, **刘维奇**
(山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

**摘　要**: 讨论了函数系数自回归模型, 在误差项服从正则变化尾的情形下, 模型的概率性质. 最后得出带正则变化尾误差的函数系数自回归模型有平稳解, 并且平稳解与扰动项有相同的重尾概率指数.

**关键词**: 函数系数; 自回归模型; 正则变化尾; 概率性质
**中图分类号**: O212　　　**文献标识码**: A

## 0　引言

大量的时间序列分析是针对线性模型讨论的, 最典型的线性模型是Box 和Jenkins[1]提出的自回归滑动平均(ARMA)模型. 该模型易于分析并且对实际生活中的许多时间序列数据有相当好的逼近性能, 所以被广泛应用. 然而在某些情况下, 简单线性模型不能很准确的描述事物潜在的随机原理, 表现出一定的局限性. ARMA 模型逐渐得到推广, Granger 和Joyeux[2]推广为部分ARMA 模型, Hannan 和Deistler[3]提出多变量的向量ARMA 模型, Chen 和Tsay[4]提出非线性可加自回归模型. 此时所谓的线性模型已经包含有一定的非线性特征. 接着, 跳出线性的限制, 涌现出许多的非线性模型, 如双线性模型, 门限自回归模型等. 但是, 在20 世纪80 年代的早期, 参数模型的发展占主导地位[5]. 最有代表性的是Engel[6]针对金融时间序列提出的自回归条件异方差(ARCH)模型, 和Tiao 和Tsay[7], Tong[8]针对生物和经济数据提出的门限自回归模型.

近年来, 随着非参数回归理论的发展, 非参数半参数时间序列分析也越来越受到人们的重视. 函数系数自回归模型是非参数回归中非常重要的模型. 在许多文献中, 学者们详细研究了有关它的各种模型的概率性质[9-11], 估计方法等一系列问题.

但是目前的研究大多是在假定扰动项(也称误差项) $\epsilon$ 是Gauss 分布情形下进行的. 然而, 许多经验数据表明大量的像经济、金融、通信、水文学和气象学等领域的时间序列数据具有重尾分布而不是Gauss 分布[12]. 目前, 一些学者的兴趣已逐渐转入到用具有重尾边际分布的模型来刻画金融时间序列, 也就是所谓的重尾时间序列. 事实上, 人们已经发觉, 用带有重尾噪声的模型来描述金融时间序列往往要优于用带有Gauss 噪声的模型[13,14]. 因此, 对扰动项 $\epsilon$ 是重尾分布的模型进行研究具有一定的理论意义和实际价值.

于是, 本文考虑如下函数系数自回归模型: 带正则变化尾误差的函数系数自回归模型(Functional Coefficient Autoregression Models with Regularly Varying Tailed).

$$X_t = a_1(u)X_{t-1} + \cdots + a_p(u)X_{t-p} + \epsilon_t, \tag{1}$$

其中 $\{a_j(\cdot)\}$ 是从 $R$ 到 $R$ 的可测函数, 称为系数函数; $u$ 是一维随机变量, $u = X_{t-i}$, $(i = 1, \cdots, p)$; $\{\epsilon_t\}$ 是独立同分布随机变量序列, 称为模型的扰动项, $\epsilon_t$ 与 $\{X_s, s < t\}$ 独立.

在本文中讨论的模型, $\epsilon_t$ 的分布有如下的重尾概率:

---

* **收稿日期**: 2008-03-18; **修回日期**: 2008-05-19
**作者简介**: 王耀青(1979-), 女, 山西偏关人, 教师, 研究方向为时间序列分析; * 通讯作者: wangyq@sxu.edu.cn
刘维奇(1963-), 男, 山西忻州人, 教授, 从事概率统计与金融工程研究

$$P(|\epsilon_t| > x) = x^{-\alpha}L(x),\ x \to \infty, \tag{2}$$

对于某一常数$\alpha > 0$, 其中$L(x)$是慢变化函数, 满足对于任意的$x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(tx)}{L(t)} = 1. \tag{3}$$

本文主要讨论模型(1)的一些概率性质

## 1 主要结论

我们对模型(1)作如下假定:

(A 1) 系数函数$a_j(\cdot)$有界, 即满足$a_j(\cdot) \le c_j$;

(A 2) 特征函数$\lambda^p - c_1\lambda^{p-1} - \cdots - c_p = 0$所有的根都在单位圆内;

(A 3) $\epsilon$ 的分布有几乎处处为正的密度;

(A 4) $\epsilon$ 的分布满足(2)和(3)式

引理1[15] 令$\{X_t\}$是在通常的拓扑空间上的$\phi$非降马尔可夫链, 同时给定任意的常规范数$\|\cdot\|$. 如果转移概率$P_r(x, \cdot)$是强连续的, 而且存在一个紧集$K$ 和一个常数$\rho(0< \rho< 1)$, 使得

$$E(\|X_{t+1}\| \,|X_t = X)\begin{cases} < \infty, & X \in K; \\ < \rho\|X\|, & \text{其他}, \end{cases}$$

那么$\{X_t\}$是几何遍历的

引理1中$\phi$是概率空间$X_t$上的一个测度 引理的含义是, 当过程远离原点时, 在假设的条件下, 下一状态变量范数的期望将收敛到原点

引理2[16] 令$\{X_t\}$是一个非周期马尔可夫链, $h$ 是一固定正整数 那么由$\{X_{th}\}$是几何遍历可以推出$\{X_t\}$是几何遍历的 其中$\{X_{th}\}$是$\{X_t\}$的$h$ 步子序列

由引理1和2, 我们得到下面的定理:

定理3 函数系数自回归模型(1)在满足条件(A 1- A 3)下, 是几何遍历的

证明 令$X_t = (x_t, \cdots, x_{t-p+1})'$, $Z_t = (\epsilon_t, 0, \cdots, 0)'$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & \cdots & a_{p-1}(x) & a_p(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ 则模型(1)可写成

$$X_t = A(u)X_{t-1} + Z_t. \tag{4}$$

在$R^p$ 空间上范数定义为$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}$, 有如下结论:

如果$a_j(\cdot) \le c_j$, 那么对任意的$Y = (y_1, \cdots, y_p)' \in R^p$ 我们有

$$\|A(x)Y\| \le \|C|y|\|, \tag{5}$$

其中, $(|Y| = (|y_1|, \cdots, |y_p|)'$, 且
$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{p-1} & c_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

首先对于(6)式中定义的矩阵, 行列式

$$|\lambda I - C|_p = \lambda^p - c_1\lambda^{p-1} - \cdots - c_p.$$

所以(A 2)中特征函数的所有根是矩阵C 的特征根

令$\lambda_{\max}$为C 中最大的特征值, 因为$|\lambda_{\max}| < 1$, 且$\|C^n\|^{\frac{1}{n}} \to |\lambda_{\max}|$, 我们能找到$0 < \delta < 1$ 和$h > 1$, 使得$\|C^h\| < 1 - \delta$, 由上面结论(5)我们有:

$$E(\|X_{t+h}\| \mid X_t = X) = E(\|\prod_{i=0}^{h-1} A(X_{t+i})X_t + \sum_{i=1}^{h}[\prod_{j=i}^{h-1} A(X_{t+j})]Z_{t+i}\| \mid X_t = X) \le$$

$$\|C^h |X|\| + E\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\| \le$$

$$\|C^h\| \|X\| + E\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\| \le$$

$$(1-\delta)\|X\| + E\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\|.$$

因为$E\|Z_t\|$是有界的, 故$E\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\|$是有界的, 且界不依赖于$X$. 这样我们能找到足够大的$M>0$, 使得当$\|X\|>M$ 时, 有

$$(1-\delta)\|X\| + E\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\| < (1-\delta)\|X\|,$$

其中$0<\delta_1<1$, 因此紧集$K=\{(x_1,\cdots,x_p) \mid \sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2} \le M\}$满足$X \notin K$ 时, $E(\|X_{t+h}\| \mid X_t = X) < (1-\delta_1)\|X\|$. 因此由引理1 和2 得, $\{X_t\}$是几何遍历的

**定理4** 假定式(1) 中系数函数$a(\cdot)$能写成$a_i(X) = g_i(X) + h_i(X)$, 其中$g_i(\cdot)$和$h_i(\cdot)$是有界函数, 满足$|g_i(\cdot)| < c_i$ 且$h_i(X)x_i$一致有界 如果$\epsilon_t$ 在实直线$R^1$ 上有正支撑且特征函数所有根都在单位园内, 那么式(1) 中的函数系数自回归过程是几何遍历的

**证明** 令

$$G(X) = \begin{pmatrix} g_1(X) & \cdots & g_{p-1}(X) & g_p(X) \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, H(X) = \begin{pmatrix} h_1(X) & \cdots & h_{p-1}(X) & h_p(X) \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C 是式(6) 定义的矩阵 那么有:

$$E(\|X_{t+h}\| \mid X_t = X) = E(\|\prod_{i=0}^{h-1} G(X_{t+i})X_t + H(X_{t+h-1})X_{t+h-1} +$$

$$\sum_{i=0}^{h-2}[\prod_{j=i+1}^{h-1} G(X_{t+j})]H(X_{t+i})X_{t+i} + (\sum_{i=1}^{h}[\prod_{j=i}^{h-1} G(X_{t+j})]Z_{t+i}\| \mid X_t = X) \le$$

$$\|C^h |X|\| + E(\| |H(X_{t+h-1})X_{t+h-1}| + \sum_{i=0}^{h-2} C^{h-i-1}|H(X_{t+i})X_{t+i}| \| X_t = X) +$$

$$E(\|\sum_{i=1}^{h} C^{h-i}|Z_{t+i}|\|) \le$$

$$\|C^h\| \|X\| + \sum_{i=0}^{h-1}\|C^{h-i-1}\| E(H(X_{t+i})X_{t+i}\| \mid X_t = X) + E(\sum_{i=1}^{h}\|C^{h-i}Z_{t+i}\|) \le$$

$$(1-\delta)\|X\| + \sum_{i=0}^{h-1}\|C^{h-i-1}\| E(H(X_{t+i})X_{t+i}\| \mid X_t = X) + E(\sum_{i=1}^{h}\|C^{h-i}Z_{t+i}\|).$$

因为$h_i(X)$是有界的, 我们有对任意的$X$, $\|H(X)X\|$是有界的 因此$\sum_{i=0}^{h-1}\|C^{h-i-1}\| E(H(X_{t+i})X_{t+i}\| \mid X_t = X)$ 是有界的, 且不依赖于$X$. 同理, 我们证明$E(\sum_{i=1}^{h}\|C^{h-i}Z_{t+i}\|)$ 是有界的 所以, 如同定理3 的证明, 得到$\{X_t\}$是几何遍历的

**引理5**[17] 非线性自回归模型

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_{t-p}) + \epsilon_t$$

其中$\epsilon_t$ 满足(A 4), 在几何遍历时, 有唯一平稳解, 且一维平稳解的边际分布具有重尾概率性质, 并且与扰动

项$\epsilon_t$重尾概率指标相同.

由定理3和引理5我们可以得到下面一个非常有用的推论,它在模型(1)的参数估计中,证明估计的渐近性质时用很重要的作用.

**推论6** 在条件(A1-A4)下,模型(1)有唯一的平稳解$\{X_t\}$,并且$X_t$具有重尾概率性质,且与扰动项$\epsilon_t$有相同的重尾概率指数$\alpha$.

## 2 推论及应用

定理3和4仅仅是给出几何遍历的充分条件而非必要的.例如,我们拿线性的AR模型来说,取$a_j(\cdot)=c_j$,则定理中要求的特征函数$\lambda^p-c_1\lambda^{p-1}-\cdots-c_p=0$所有的根都在单位圆内,显然不是必要的.但是,对于一些特殊的函数系数模型,更弱的条件下,几何遍历的充分必要条件也是可能的.如文献中[9,10]证明了对于一阶的门限自回归模型,上述条件就是几何遍历的充分必要条件.

本文讨论了一般的函数系数自回归模型在重尾情形下的概率性质,当然对于它的一些特例,如门限自回归模型,指数自回归模型等在重尾情形下上述性质都是成立的.

例如:考虑指数自回归模型:

$$x_t=[a_1+b_1\exp(-c_1x_{t-d}^2)]x_{t-1}+\cdots+[a_p+b_p\exp(-c_px_{t-d}^2)]x_{t-p}+\epsilon_t, \tag{7}$$

其中$c_i\geq 0$, $(i=1,\cdots,p)$. 如果满足:

$$\lambda^p-d_1\lambda^{p-1}-\cdots-d_p=0\text{的所有根都在单位园内(其中}d_i=\max\{|a_i|,|a_i+b_i|\}), \tag{8}$$

则由定理3知,这个过程是几何遍历的.

特别地,若$p=1$,那么几何遍历的条件变为$|a_1|<1$且$|a_1+b_1|<1$. 从而,我们可以得到如下推论.

**推论7** 指数自回归模型(7),在条件(A3)和式(8)成立时,过程$x_t$是几何遍历的.

上文提到推论6是一个很重要的结论,我们应用推论6还可以得到下面推论.

**推论8** 在条件(A3),(A4)和式(8)成立时,模型(7)有唯一的平稳解$x_t$,并且$x_t$具有重尾概率性质,且与扰动项$\epsilon_t$有相同的重尾概率指数$\alpha$.

限于篇幅,这里不再列举.对于函数系数自回归模型的其他一些特例可类似地进行研究.实际上,本文的两个定理是检验一些非线性时间序列几何遍历性的很好的工具.同时,推论6也是重尾时间序列中关于平稳解重尾概率性质的一个重要结论.


参考文献:

[1] BOX G E P, JENKINS G M. Time Series Analysis, Forecasting and Control[M]. San Francisco: Holden Day, 1970.

[2] GRANGER C W J, JOYEUX R. An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1980, **1**: 15-29.

[3] HANNAN E J, DEISTLER M. The Statistical Theory of Linear Systems[M]. New York: Wiley, 1988.

[4] CHEN R, TSAY R S. Nonlinear Additive ARX Models[J]. *Amer Statist Assoc*, 1993, **88**: 955-967.

[5] TONG H. Nonlinear Time Series Analysis Since 1990: Some Personal Reflections[J]. *Acta Mathematic Application Sinica*, (English Series), 1986: 65.

[6] ENGLE R F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of U.K. Inflation[J]. *Econometrica*, 1982, **50**: 987-1008.

[7] TIAO G C, TSAY R S. Some Advances in Nonlinear and Adaptive Modeling in Time Series[J]. *Journal of Forecasting*, 1994, **13**: 109-131.

[8] TONG H. Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach, Oxford, U.K[M]. Oxford University Press, 1990.

[9] PETRUCCELLI J, WOODLFORD S W. A Threshold AR(1) Model[J]. *Journal of Applied Probability*, 1984, **21**: 270-286.

[10] CHEN R, TSAY R S. On the Ergodicity of TAR(1) Processes[J]. *Annals of Applied Probability*, 1991, **1**: 613-634.

[11] CHEN Rong, RUEY S TSAY. Functional-Coefficient Autoregressive Models[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1993, **88**(421): 298-308.

[12] ADLER R J, FELDAMAN R, TAQQU M S. A User's Guide to Heavy Tails: Statistical Tech for Analyzing Heavy Tailed Distribution and Processes[M]. Boston: Birkhauser, 1997.

[13] RENSNICK S. Heavy Tail Modeling and Teletraffic Data[J]. *Ann Statist*, 1997, **25**: 1805-1869.

[14] BARNDORFF-NIELSEN O E, SHEPHARD N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based Models and Some of their Uses in Financial Economics[J]. *J R Statist Soc B*, 2001, **63**(Part2): 167-241.

[15] TWEEDIE R L. Sufficient Conditions for Ergodicity and Recurrence of Markov Chain on a General State-Space[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1975, **3**: 385-403.

[16] TJESTHEM D. Nonlinear Time Series and Markov Chains[J]. *Advanced Applied Probability*, 1990, **22**: 587-611.

[17] 金 阳, 安鸿志. 带有重尾扰动项的非线性自回归模型[J]. 中国科学A辑, 2005, **35**(1): 39-45.

# Probabilistic Properties of Functional Coefficient Auto-regression Models with Regularly Varying Tailed

WANG Yao-qing, LIU Wei-qi

(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

**Abstract**: The probabilistic properties of functional coefficient auto-regression models with regularly varying tailed are discussed. It is concluded that the models have stationary solution and the solution have the same heavy tail probability index with error item.

**Key words**: functional coefficient; auto-regression models; regularly varying tailed; probabilistic properties

(上接第317页)

[3] CHEN M, CHEN G M. Geometric Ergodicity of Nonlinear Autoregressive Models with Changing Conditional Variances[J]. *Can J Stat*, 2000, **28**(3): 605-613.

[4] LU Z, JIANG Z L. Geomtric Ergodicity of a Multivariate Processes[J]. *Stat Probabil Lett*, 2001, **51**: 121-130.

[5] HWANG S Y, WOO M J. Threshold ARCH(1) processes: Asymptotic Inference[J]. *Stat Probabil Lett*, 2001, **53**: 11-20.

[6] HOU Z T, YU Z, SHI P. Study on a Class of Nonlinear Time Series Models and Ergodicity in Random Environment Domain[J]. *Math Methods Oper Res*, 2005, **61**: 299-310.

[7] KOLMANOVSKII V B, MAIZENBERG T L, RICHARD J P. Mean Square Stability of Difference Equations with a Stochastic Delay[J]. *Nonlinear Anal*, 2003, **52**: 795-804.

[8] CHAN K S, TONG H. On the use of the Deterministic Lyapunov Function for the Ergodicity of Stochastic Difference Equations[J]. *Advanced Appl Prob*, 1985, **17**: 666-678.

[9] DAVISM H A. Markov Models and Optimization[M]. Chapman & Hall, London, UK, 1993.

[10] SHENG Z H. Stability Analysis of Nonlinear Time Series Model——Ergodic Theory and Applications[M]. Beijing: Science Press, 1993.

# 一类新的非线性时间序列模型的极限性态研究

张浩敏, 俞 政, 龙绍舜

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙 410075)

**摘 要**: 提出了带可数多个白噪声干扰的随机时滞的非线性时间序列模型并研究了这类模型的极限性态, 得到了一些新的结果.

**关键词**: 几何遍历; 随机环境; 非线性时间序列