山西大学学报(自然科学版) 31(1): 15～17, 2008
Journal of Shanxi University (Nat. Sci. Ed.)

文章编号: 0253-2395(2008)01-0015-03

具有无限方差的一阶自回归非平稳过程*

李冬梅, 刘维奇
(山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006)

摘　要: 对具有无限方差的一阶自回归非平稳过程进行了研究 得到了参数 $\theta=-1$ 时最小二乘估计 $\hat{\theta}_n$ 的相合性, 并且证明了其极限分布是 Lévy 过程的函数

关键词: 无限方差; 一阶自回归非平稳过程; 相合性; 极限分布
中图分类号: O211　　　**文献标识码**: A

考虑一阶自回归过程($AR(1)$)

$$X_t = \theta X_{t-1} + Z_t, X_0 = 0, \tag{1}$$

其中 θ 是未知参数, $\{Z_t\}$ 是噪声随机变量, θ 的最小二乘估计为

$$\hat{\theta}_n = \left(\sum_{t=1}^{n} X_{t-1}^2\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_{t-1} X_t .$$

若噪声列 $\{Z_t\}$ 是独立同分布(i.i.d.)或鞅差序列且 $(2+\delta)$, $\delta>0$ 阶矩存在, 则对 $|\theta|<1$ 与 $|\theta|=1$ 的渐近性质, 如强相容性, 弱收敛性均已被很好的研究, 可见文[1].

近几年来, 对 Z_t 是重尾的随机变量, 关于 $\hat{\theta}_n$ 的渐近性有相当大的兴趣 重尾分布在描述定量经济变量与股票价格变化是非常有用的 若 $\{Z_t\}$ 独立同分布, 其分布函数 F 在指数为 $0<\alpha<2$ 的稳定分布律的吸引域内 文[2, 3]对平稳 $AR(1)$ 模型建立了 θ 的最小二乘估计 $\hat{\theta}_n$ 的强相容性 然而, 当 $|\theta|=1$ 时, 对简单的 $AR(1)$ 模型, $\hat{\theta}_n$ 的渐近性质很难得到 当 $|\theta|=1$ 时, 即使对独立同分布的具有有限方差的 $\{Z_t\}$, $\hat{\theta}_n$ 的渐近性质完全不同于 $|\theta|<1$ 情形的渐近性质 对无限方差情形, 文[4]已研究了 $\theta=1$ 的强相合性与极限分布 本文的目的是建立(1)中当 $\theta=-1$, Z_t 在指数为 $0<\alpha<2$ 的稳定分布律的吸引域内时 $\hat{\theta}_n$ 的渐近性质

本文我们将假定下列条件满足

假定 1　X_t 满足(1), 且 $\theta=-1$, $\{Z_t\}$ 独立对称同分布, 分布函数为 F, $X_0=0$.

假定 2　分布函数 F 属于指数为 α 的稳定分布 G 的吸引范围, $0<\alpha<2$

引理 1[4]　假定 $\{Z_t\}$ 是独立同分布随机变量, $E|Z_t|^r<\infty$, $0<r<2$, 则在 L^r 中

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{r}} \sum_{t=1}^{n} Z_t = 0, \text{a.s.}$$

引理 2[4]　定义 $a_n = a(n) = n^{\frac{1}{\alpha}}$, $b_n = b(n) = \left[\frac{n}{\log\log n}\right]$, 其中 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数 令 $c(n) = a(b(n))$, 假设假定 2 成立, λ 是正整数, 则存在正整数 $A_{\lambda,G}$, 使得

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \left(|X_t|/c(n)\right)^{\lambda} = A_{\lambda,G}, \text{a.s.}$$

在下面的引理 3, 4 中 $(U(t), V(t))$ 是测度为 $\tilde{v}$ 的 Lévy 过程, $\tilde{v}(A) = v\{x\in R: (x, x^2)\in A\}$, $v(x,\infty) = px^{-\alpha}$, $v(-\infty,-x) = qx^{-\alpha}$, $x>0$, $0<\alpha<2$, $q=1-p$.

* 收稿日期: 2007-05-28
基金项目: 山西大学青年科技基金
作者简介: 李冬梅(1977-), 女, 讲师, 硕士, 主要从事概率统计研究

引理 3[4] 假定 a_n, $\{X_t\}$同前, 则

$$n^{-1}a_n^{-1}\sum_{t=1}^{n}X_t^2 \Rightarrow \int_0^1 U^2(t)\,dt$$

引理 4[4] 假定 a_n, $\{Z_t\}$, $\{X_t\}$同前, 则

$$\frac{1}{2}a_n^{-2}(X_n^2-\sum_{t=1}^{n}Z_t^2) \Rightarrow \frac{1}{2}[U^2(1)-V(1)].$$

在引理 1, 2 成立的条件下, 我们将建立(1)中 $\hat{\theta}_n$ 最小二乘估计的强相容性.

定理 1 对所有 $\epsilon < 0$, 当 $n\to\infty$时,

$$n^{1-\epsilon}(\hat{\theta}_n+1)\to 0,\ a.s.$$

证明 因为

$$\hat{\theta}_n-(-1)=(\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2)^{-1}(\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}Z_t),$$

对上式两边同时乘以 $X_t=-X_{t-1}+Z_t$ 的平方, 相加得到

$$(\hat{\theta}_n+1)(\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2)^{-1}=\frac{1}{2}(-X_n^2+\sum_{t=1}^{n}Z_t^2). \tag{2}$$

由引理 2, 对 $0<\alpha<\eta$,

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-(1+2/\eta)}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2=\infty,\ a.s.$$

因为 $E|Z_t|^{v}<\infty$, $0<v<\alpha$, 又由于$\{Z_t\}$是独立对称同分布随机变量序列, 故$\{(-1)^iZ_{t-i}\}$也是独立对称同分布随机变量序列, 由引理 1 得,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/v}X_n=0,\ a.s.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2/v}X_n^2=0,\ a.s.$$

又由于$\{Z_t^2\}$在指数为 $\alpha/2$ 的稳定律的吸引域, 再利用引理 1 得

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2/v}(\sum_{t=1}^{n}Z_t^2)=0,\ a.s.$$

由(2)我们可以得到

$$n^{1-\epsilon}(\hat{\theta}_n+1)=\frac{n^{-2/\eta+2/v-\epsilon-2/v}(-X_n^2+\sum_{t=1}^{n}Z_t^2)}{2n^{-(1+2/\eta)}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1}^2}.$$

由取 $\epsilon>2/v-2/\eta$, v, η同前, 即可证得定理.

下面我们将建立 $\hat{\theta}_n$ 最小二乘估计的极限分布.

定理 2 假定 a_n, $\{X_t\}$同前, 则

$$n(\hat{\theta}_n-1)\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}[-U^2(1)+V(1)]}{\int_0^1 U^2(t)\,dt}.$$

证明 对任意的 $w\in\{\int_0^1 U^2(t)\,dt=0\}$, 集合$\{t: U^2(t,w)=0\}$的 Lebesgue 测度为 1, 因此在$[0,1]$是稠密的. 由 $U(t,w)$ 的右连续性, 可得对 $0\le t\le 1$, $U(t,w)=0$. 因为 $U(\frac{1}{2})$ 有连续性分布, 因此 $P\{\int_0^1 U^2(t)\,dt=0\}\le P\{U(\frac{1}{2})=0\}=0$, 从而 $\int_0^1 U^2(t)\,dt>0$ 以概率 1 成立. 由引理 3, 4 及连续映射定理证得定理成立.

参考文献:

[1] LAI T L, WEI C Z. Least-squares Estimates in Stochastic Regression Models with Applications to Identification and

Control of Dynamical System[J]. *Annals of Statistics*, 1982, **10**: 154-166.
[2] HANNAN E J, KANTER M. Autoregressive Process with Infinite Variance[J]. *Journal of Applied Probability*, 1977, **14**: 411-415.
[3] KNIGHT K. Rate of Convergence of Centered Estimates of Autoregressive Parameters for Infinite Variance Regressions [J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1987, **8**: 51-60.
[4] CHAN N H, TRAN L T. On the First-order autorgressive Process with Infinite Variance[J]. *Econometric Theory*, 1989, **5**: 354-362.

First-order Unstable Autoregressive Process with Infinite Variance

LI Dong-mei, LIU Wei-qi
(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: We study the unstable autoregressive process for the first order with infinite variance. The consistency of the ordinary least squares estimator θ_n is obtained for $\theta = -1$, and the limiting distribution of θ_n is established as a function of a Lévy process.

Key words: infinite variance; the first-order unstable autoregressive process; consistency; limiting distribution

请本刊作者认真做好参考文献的著录

据国家标准

凡科学研究报告或论文都要列出文后参考文献, 一般每篇文章应不少于 7 条左右(综述性论文除外)。所列文献应是作者直接参阅过的。

本刊采用顺序编码制, 务请在正文中按引用文献的先后用阿拉伯数字外加方括号[ ]标注序号。

文献著录执行 GB/T 7714-2005, 要求做到项目齐全、著录符号正确。几种常用的文献著录格式及符号如下:

a. **普通图书**(包括专著、教材)、会议论文集、资料汇编、学位论文、报告(含科研、技术、调查、考察报告等)、参考工具书(包括手册、百科全书、字典、图集等)

[序号] 主要责任者, 文献题名: 其他题名信息(任选)[文献类型标识]. 其他责任者(任选). 版本项(任选). 出版地: 出版者, 出版年: 起止页码(当整体引用时不注).

b. **期刊** [序号] 主要责任者. 题名[J]. 刊名(建议外文刊名后加 ISSN 号), 年, 卷(期): 起止页码. (如期刊不设卷, 则为"年, (期): 页码. ")

c. **报纸** [序号] 主要责任者. 题名[N]. 报纸名, 出版日期(版次).

d. **标准** (包括国际标准、国家标准、规范、法规等) [序号] 标准编号, 标准名称[S].

e. **专利** [序号] 专利所有者. 专利题名: 专利国别, 专利号[P]. 出版日期或发布日期.

f. **档案** [序号] 主要责任者. 文献题名: 原件日期[B]. 收藏地: 收藏单位(收藏编号): 起止页码.

g. **古籍** (1911 年以前出版, 无现代版本但有据可查的善本)

[序号] 主要责任者. 文献题名[O]. 其他责任者(包括校、勘、注、批等) 刊行年代及刊物机构(版本). 收藏机构.

h. **各种未定义类型文献** [序号] 主要责任者. 文献题名[Z]. 出版者: 出版地, 出版年.

i. **析出文献** [序号] 析出文献主要责任者. 析出文献题名[文献类型标识]//原文献主要责任者(任选). 原文献题名. 出版地: 出版者, 出版年: 析出文献起止页码.

j. **电子文献** [序号] 主要责任者. 题名[文献类型标识/文献载体类型标识][引用日期](更新日期). 获取或访问路径.

务请对每条文献的各个著录项目仔细核对, 做到准确无误。

对于参考文献著录不符合本刊要求且问题严重的来稿, 恕不审理。

山西大学学报编辑部