山西大学学报(自然科学版) 32(3):349～352,2009
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

文章编号:0253-2395(2009)03-0349-04

非对称Log-GARCH模型及重尾新息下的准极大似然估计

董晨昱[1],**刘维奇**[2]
(1.山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006;2.山西大学 管理科学与工程研究所,山西 太原 030006)

摘　要:在 Geweke(1986)和 Pantula(1986)提出的Log-GARCH模型及 Nelson(1991)提出的 EGARCH模型的基础上,提出了非对称 Log-GARCH(Asymmetric Log-GARCH)模型,该模型不仅考虑了信息非对称效应,和EGARCH模型相比,在重尾误差下更容易得到准极大似然估计,最后文章还给出了估计的渐进性质.

关键词:非对称;Log-GARCH;重尾误差;准极大似然估计
中图分类号:O211　　　**文献标识码**:A

0　引言

在长期的实证研究中,人们发现大部分金融时间序列都表现出聚集性特征和尖峰厚尾性特征,为了尽量准确地刻画金融市场波动的这些特征,并给出好的预测,Engle[1]和 Bollerslev[2]相继提出 ARCH模型和GARCH模型对"异方差"进行了成功的刻画、计量,受到许多金融学者的青睐.但由于 GARCH模型中方差方程要求所有的参数非负,且模型不能反映信息的不对称效应,为了弥补 GARCH模型的不足,Geweke[3]和Pantula[4]提出了Log-GARCH模型,Nelson[5]提出了 EGARCH模型,Ding等[6]提出了 PARCH模型等.本文的非对称Log-GARCH(Asymetric Log-GARCH,下文简记为 AL GARCH)模型就是在Log-GARCH模型和 EGARCH模型的基础上提出的,该模型不仅克服了Log-GARCH模型不能反映杠杆效应的不足,和EGARCH模型相比,在重尾误差下更容易得到准极大似然估计.

尽管 GARCH类模型可以刻画一部分"尖峰厚尾"特征,但 Mikosch Starica[7]发现残差服从正态分布的GARCH类模型的尾部比实际数据中的薄,因此近年来对具有重尾残差的 GARCH 类模型的研究层出不穷.本文针对提出的非对称Log-GARCH模型,考虑其在重尾误差下的准极大似然估计.并给出了估计的渐进性质.

1　模型及其准极大似然估计

1.1　模型

设$\{X_t, t=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$为一时间序列,且满足

$$X_t = \sigma_t Z_t, \tag{1}$$

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^{q} a_j g(X_{t-j}) + \sum_{j=1}^{p} b_i \log(\sigma_{t-i}^2),\ g(X_t) = \theta X_t + \gamma[|X_t| - E|X_t|]. \tag{2}$$

其中 $Z_t \sim i.i.d.$,且 $E(Z_t)=0, Var(Z_t)=1, \sigma_t^2 = E^2(X_t|\phi)$,则称满足(1),(2)式的模型为非对称 Log-GARCH模型,这里 $g(X_t)=\theta X_t+\gamma[|X_t| - E|X_t|]$为信息冲击曲线.或者(2)式可写为一个 ARMA$(p,q)$形式,即:

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \frac{1 + a_1 L + \cdots + a_q L}{1 - b_1 L - \cdots - b_q L} g(X_{t-1}). \tag{3}$$

* **收稿日期**:2009-04-12
基金项目:山西省人文社会科学重点研究基地项目"金融复杂性实证研究"(20083006)
作者简介:董晨昱(1980-),女,山西晋城人,助教,在读硕士,主要从事金融时间序列等领域的研究. E-mail:bailange@sxu.edu.cn

大量的实证分析表明 GARCH 类(1,1)模型就能很好的描述波动率聚集性这一特征,因此这里我们主要研究 $p=q=1$ 的情况,即:

$$\log(\sigma_t^2)=\omega+\gamma|X_t|+\theta X_t+\beta\log(\sigma_{t-1}^2). \tag{4}$$

1.2 模型平稳性

定理 1 设$\{X_t\}$满足(1),(4)式的 ALGARCH(1,1)模型,且 Z_t 与$\{X_{t-k},k\geq 1,\forall t\}$独立,若$\beta<1$,则(4)式定义了一个平稳过程.

证明 米尔斯[8]已证明 $g(X_t)$是均值为 0,方差为常数的白噪声,从而 $\log(\sigma_t^2)$是一个 ARMA(1,1)过程,故当$\beta<1$ 时,(4)式有平稳解.

1.3 模型的准极大似然估计

设$\{X_t\}$为满足(1),(4)式的平稳过程,即:$EX_t^2<\infty$,若$\beta<1$,Z_t 与$\{X_{t-k},k\geq 1,\forall t\}$独立,且 Z_t 具有重尾,并设其分布函数 $F(x)$满足:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-F(xy)}{1-F(x)}=y^{-\alpha},\lim_{x\to\infty}\frac{F(-x)}{1-F(x)}=d. \tag{5}$$

其中 $y>0$,$d\in[0,\infty]$为一常数,为保证 $EZ_t^2<\infty$,故$\alpha>2$,这里我们只考虑$\alpha>4$ 的情况,即,$EZ_t^4<\infty$,由(4)式可得

$$\log(\sigma_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))=\frac{\omega}{1-\beta}+\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k|X_{t-k}|+\theta\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k X_{t-k}. \tag{6}$$

记$\mu=(\omega,\gamma,\theta,\beta)$,则模型的极大似然估计为最小化:$L(\omega,\gamma,\theta,\beta)=\sum_{t=1}^{n}\{X_t^2/\sigma_t^2+\log\sigma_t^2\}$,即$\bar{\mu}=\mathrm{argmin}L(\omega,\gamma,\theta,\beta)$.由于样本是有限的,故我们取(6)式的一个截断形式:

$$\log(\tilde{\sigma}_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))=\frac{\omega}{1-\beta}+\gamma\sum_{k=0}^{t-1}\beta^k|X_{t-k}|+\theta\sum_{k=0}^{t-1}\beta^k X_{t-k}. \tag{7}$$

设

$$\tilde{L}_\nu(\omega,\gamma,\theta,\beta)=\sum_{t=\nu}^{n}\{X_T^2/\tilde{\sigma}_t^2+\log\tilde{\sigma}_t^2\}, \tag{8}$$

这里ν满足:当 $n\to\infty$时,有$\nu=\nu(n)\to\infty$且$\nu/n=0$.我们定义μ的准极大似然估计为:$\tilde{\mu}=\mathrm{argmin}\tilde{L}_\nu(\omega,\gamma,\theta,\beta)$.

定理 2 设$\{X_t\}$满足(1),(4)和(6)式,Z_t 的分布函数满足(5)式且 $EZ_t^4<\infty$,$\omega,\gamma,\theta,\beta$都不等于零,则$\sqrt{n}(\bar{\mu}-\mu)\sim N(0,T^2M^{-1})$.这里 $T^2=EZ_t^4-1$,$M=E_0(\sigma_t^{-4}UU^T)$,$U=\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\mu}$,$E_0$ 是当μ取真值时的期望.

证明 记$\eta_t(\mu)=\sigma_t^{-4}(\mu)\partial\sigma_t^2(\mu)/\partial\mu$,令:$\partial L(\omega,\gamma,\theta,\beta)/\partial\mu=0$ 可得:

$$\sum_{t=1}^{n}(X_t^2-\sigma_t^2(\mu))\eta_t(\mu)=0. \tag{9}$$

将$\sigma_t^2(\mu)$和$\eta_t(\mu)$在μ^0(参数的真值)处按 Taylor 展开,即:

$$\sigma_t^2(\mu)=\sigma_t^2(\mu^0)+A_t(\mu^0)^T(\mu-\mu^0)+\|\mu-\mu^0\|^2R_{1t}(\mu)\sigma_t^2(\mu^0), \tag{10}$$

$$\eta_t(\mu)=\eta_t(\mu^0)+B_t(\mu^0)(\mu-\mu^0)+\|\mu-\mu^0\|^2R_{2t}(\mu)\sigma_t^{-2}(\mu^0), \tag{11}$$

其中 $A_t(\mu)=\partial\sigma_t^2(\mu)/\partial\mu$,$B_t(\mu)=\partial\eta_t(\mu)/\partial\mu$,$R_{1t}(\mu)$和 $R_{2t}(\mu)$是相应的二阶偏导向量和矩阵,且有:

$$P\{n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\sup_{\|\mu-\mu^0\|\leq\delta}|R_{it}(\mu)|\leq C\}\to 1,i=1,2. \tag{12}$$

因为 $X_t^2-\sigma_t^2(\mu^0)=(Z_t^2-1)\sigma_t^2(\mu^0)$,所以(9)式可写为:

$$\sum_{t=1}^{n}(Z_t^2-1)\sigma_t^2(\mu^0)\eta_t(\mu^0)+\sum_{t=1}^{n}\{(Z_t^2-1)\sigma_t^2(\mu^0)B_t(\mu^0)-\eta_t(\mu^0)A_t(\mu^0)^T\}(\mu-\mu^0)+\|\mu-\mu^0\|^2nR(\mu)=0. \tag{13}$$

由(12)式我们可证得

$$P\{\sup_{\|\mu-\mu^0\|\leq\delta}|R(\mu)|\leq C\}\to 1. \tag{14}$$

又 $EZ_t^2<\infty$,故由大数定理可得:

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(Z_t^2-1)\sigma_t^2(\mu^0)B_t(\mu^0)\to 0, \tag{15}$$

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\eta_t(\mu^0)A_t(\mu^0)^T\to E\{\eta_t(\mu^0)A_t(\mu^0)^T\}=M. \tag{16}$$

由(13)-(16)式可得:

$$\{M+o_p(1)\}(\mu-\mu^0)+\|\mu-\mu^0\|^2R(\mu)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(Z_t^2-1)\omega_t, \tag{17}$$

其中 $\omega_t=\sigma_t^2(\mu^0)\eta_t(\mu^0)$,由 Hall and Yao[3]则有:

$$\{M+o_p(1)\}(\bar{\mu}-\mu^0)=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}(Z_t^2-1)w_t. \tag{18}$$

由(18)式可得近似等式:$(\bar{\mu}-\mu^0)=n^{-1}M^{-1}\sum_{t=1}^{n}(Z_t^2-1)\omega_t$,等式右端是一个平方可积鞅[9],从而由鞅中心极限定理我们可得:$\sqrt{n}(\bar{\mu}-\mu)\sim N(0,T^2M^{-1})$.

定理3 设$\{X_t\}$满足(1),(4)和(7)式,Z_t的分布函数满足(5)式且 $EZ_t^4<\infty$,$\omega,\gamma,\theta,\beta$都不等于零,似然函数取(8)式,$\nu$满足:当 $n\to\infty$时,$\nu/\log n\to\infty$,$\nu/n\to 0$,则:$\sqrt{n}(\hat{\mu}-\mu)\sim N(0,T^2M^{-1})$. T和 M 同上.

证明 由$\log(\sigma_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))$和$\log(\tilde{\sigma}_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))$的定义且 $\nu/\log\to\infty$, $E|X_t|<\infty$,可得,对任意的 $C>0$,有

$$\sup_{\mu\in N}\sup_{t\in[\nu,n]}|\log(\tilde{\sigma}_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))-\log(\sigma_t^2(\omega,\gamma,\theta,\beta))|=O_p(n^{-C}). \tag{19}$$

这时 N是 μ^0 的充分小的固定开领域,令:$L_\nu(\omega,\gamma,\theta,\beta)=\sum_{t=\nu}^{n}\{X_t^2/\sigma_t^2+\log\sigma_t^2\}$,由(19)式可得在 N中有 $\tilde{L}_\nu(\omega,\gamma,\theta,\beta)-L_\nu(\omega,\gamma,\theta,\beta)=O_p(n^{-C})$,故由文献[9]中的定理2.2及文献[10]可得结论.

2 结论

本文在 Log-GARCH 模型和 EGARCH 模型的基础上提出了非对称 Log-GARCH 模型,并在重尾误差分布的重尾指数 $\alpha>4$ 的情形下给出了模型的准极大似然估计,且就估计的渐进性给出了证明,这有助于进一步研究重尾误差下的风险值(VaR)估计,就重尾误差指数 $2<\alpha<4$ 及 $\alpha<2$ 的情形,我们将在后续的论文中进一步论证.

参考文献:

[1] ENGLE R F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Varance of U K Inflation[J]. *Econometrica*, 1982, **50**: 987-1008.

[2] BOLLERSLEV T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity[J]. *Economet*, 1986, **31**: 307-327.

[3] NELSON D. Conditional Heteroskedasticity in Asset Retruns: A New Approach[J]. *Econometrica*, 1991, **59**(2): 347-370.

[4] GEWEKE J. Comment-Modeling Persistence of Conditional Variances[J]. *Econometric Review*, 1986(6): 57-61.

[5] PANTULA S G. Modelling Persistence in Conditional Variances: A Comment[J]. *Econometric Review*, 1986(5): 71-74.

[6] DING Z X, GRANGER C W G, ENGLE R F. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Modle [J]. *Journal of Empirical Finance*, 1993(1): 83-106.

[7] MIKOSCH T, STARICA C. Limit Theory for the Sample Autocorrelations and Extremes of a GARCH(1,1) Process[J]. *Ann Statist*, 2000, **28**: 1427-1451.

[8] 特伦斯 C 米尔斯. 金融时间序列的经济计量学模型[M]. 俞卓菁译. 北京:经济科学出版社, 2002: 146.

[9] HALL P, YAO YQ. Infernce in ARCH and GARCH Models with Heavy-tailed Error[J]. *Econometrica*, 2003, **71**: 285-317.

[10] HANG C N, DENG Shi-jie, LIANG Peng, *et al*. Interval Estimation of Value-at-risk Based on GARCH Models with Heavy-tailed Innovations[J]. *Journal of Econometrics*, 2007, **137**: 556-576.

Asymmetric Log-GARCH Model and Maximum Likelihood Estimator Based on Heavy-Tailed Errors

DONG Chen-yu[1] ,LIU Wei-qi[2]

(1. *School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*;

2. *Institute of Management Science and Engineering, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract:In the present paper, Asymmetric Log-GARCH Model was put forward on the basis of Log-GARCH, rasied by Geweke (1986) and Pantula (1986), and the EGARCH Model, rasied by Nelson (1991). This Model not only took Asymmetric information effect into account, and at the same time, compared with the EGARCH Model, but also was easier to obtain the Quasimaximum likelihood estimator in the case of Heavy-tailed errors. At last, the asymptotic nature of the estimator was provided.

Key words:asymmetric;Log-GARCH;heavy-tailed errors;quasi-maximum likelihood

北京应用物理与计算数学研究所苗长兴研究员与陈琼蕾教授来我校讲学

2009年6月15日上午,北京应用物理与计算数学研究所苗长兴研究员与陈琼蕾教授应邀来我校讲学,在数学科学学院报告厅为广大师生分别做了题为“偏微分方程的调和分析方法”、“QG方程的广义Bernstein不等式及其应用”的学术报告。

报告中,苗长兴研究员主要介绍了调和分析和偏微分方程的发展历史及现在关于奇异积分算子、Strichartz估计和空间-时间范数方法、Fourier限制算子方法等理论的发展状况。

陈琼蕾教授则介绍了二维扩散Q-G方程的发展历史,并详细阐述了Littlewood-Paley理论和一个广义的Bernstein不等式及这些理论在扩散Q-G方程正则性方面的应用。

苗长兴,北京应用物理与计算数学研究所研究员,博士生导师。曾荣获第二届于敏数理科学奖与国家杰出青年科学基金。主要从事偏微分方程的调和分析方法(特别是Fourier限制型估计、Littlewood-Paley理论、Fourier局部化技术等)的研究,是国内较早从事这一核心数学领域的学术带头人之一,在国内外学术刊物上发表学术论文七十余篇,在科学出版社出版了《调和分析及其在偏微分方程中的应用》、《偏微分方程的调和分析方法》、《非线性波动方程的现代方法》等著作。

陈琼蕾,北京应用物理与计算数学研究所教授,主要从事流体动力学方程的研究,利用Littlewood-paley理论及Fourier局部化方法获得了一系列杰出的结论,在CMP、ARMA、SIAM、Poincare等国际一流数学刊物上发表十余篇文章,是国内该领域优秀青年学者之一。

(山西大学数学科学学院 2009-06-16)