山西大学学报(自然科学版)32(4):521~ 527,2009
Journal of Shanxi University(Nat.Sci.Ed.)

文章编号:0253-2395(2009)04-0521-07

门限自回归模型中门限和延时的小波识别

刘维奇, 王景乐
(山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘　要:文章对门限自回归模型进行了研究,运用小波分析方法构造了延时和门限的两种估计量,同时估计了门限的数目.文章中获得了这些估计量的收敛速度和统计量的渐近分布,并且门限的估计量具有最佳收敛速度.

关键词:门限;小波;核估计;局部线性估计
中图分类号:O212.7　　文献标识码:A

门限自回归模型是H.Tong于1978[1]年提出的,用于描述复杂的随机系统.现在已经广泛地渗透到数学、物理学、化学、生物学、经济学、地质勘探等各个学科领域.最早研究门限的估计是Chan和Tong[2].但他们只局限于延时已知和只有一个门限的情形.随后,许多学者对其作了相应的研究.Li和Xie等人[3]运用小波分析对门限自回归模型的门限和延时进行了估计.但是他们给出的估计还比较粗糙.文献[4]在小波系数的估计量中引进了核估计,但是依然局限在d已知的情况下,Wang[5]率先用小波解决了回归函数的变点的估计.Chen,Choi和Zhou[6]运用小波和非参数估计相结合给出了回归函数的变点的估计.本文对门限自回归模型进行了研究,构造了延时和门限的两种估计量,同时估计了门限的数目.

1　模型的介绍和假设

在这篇文章中,我们主要基于以下的门限自回归(SETAR)模型讨论,

$$x_t = \sum_{l=1}^{r+1}\Big(b_0^{(l)} + \sum_{i=1}^{p} b_i^{(l)} x_{t-i} + \varepsilon_t^{(l)}\Big) I_{(\lambda_{l-1},\lambda_l]}(x_{t-d}) \tag{1}$$

我们称它为$SETAR(d,r,p)$,d叫做延时,$\{\lambda_l, l=1,2,\cdots,r\}$叫做门限.其中:$\{\varepsilon_t^{(l)}, t=1,2,\cdots\}$为i.i.d的白噪声,均值为零方差为$\sigma^2$.$\{\varepsilon_t^{(l)}, t=1,2,\cdots\}$,$l=1,2,\cdots,r+1$也是相互独立的.$\lambda_0=-\infty$且$\lambda_{r+1}=\infty$.我们记

$$T(\underline{x}) = \sum_{l=1}^{r+1}\Big(b_0^{(l)} + \sum_{i=1}^{p} b_i^{(l)} x_i\Big) I_{(\lambda_{l-1},\lambda_l]}(x_d) \tag{2}$$

其中$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)'$.我们又记$\underline{x}_t=(x_t,x_{t-1},\cdots,x_{t-p+1})'$,$\underline{\varepsilon}_t=(\varepsilon_t^{(1)},\varepsilon_t^{(2)},\cdots,\varepsilon_t^{(r+1)})'$,$\underline{\alpha}(\underline{x}_{t-1})=(I_{(-\infty,\lambda_1]}(x_{t-d}), I_{(\lambda_1,\lambda_2]}(x_{t-d}),\cdots,I_{(\lambda_r,\infty)}(x_{t-d}))'$.则模型(1)可写成如下的形式:

$$x_t = T(\underline{x}_{t-1}) + \underline{\alpha}(\underline{x}_{t-1})'\underline{\varepsilon}_t \tag{3}$$

λ是模型(1)的门限当且仅当:(1).$\underline{x}=(x_1,\cdots,x_{d-1},\lambda,x_{d+1},\cdots,x_p)'$为$T(\underline{x})$的间断点,i.e,存在$\underline{x}^0=(t_1,\cdots,t_{d-1},\lambda,t_{d+1},\cdots,t_p)'\in R^p$,使得$T(\underline{x}^0-0)\neq T(\underline{x}^0+0)$,或(2).$\underline{x}$为$T(\underline{x})$的尖点.

本文假设$\alpha<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_r<b$,$a$和$b$为已知常数.$\{x_t, 1\leqslant t\leqslant n\}$是模型(1)的一个实现.记$N_n(\underline{s})=\{l: 1\leqslant l\leqslant n, \|\underline{x}_{l-1}-\underline{s}\|\leqslant h_n, \underline{x}_{l-1}\leqslant \underline{s}\}$,$I(s,\delta_n)=\{k: |a+\frac{k}{2^J}(b-a)-s|\leqslant\delta_n\}$.对于固定的$J$和$J^*$,$R_{J^*}=\{\underline{t}_{J^*1}, t_{J^*2},\cdots t_{J^*(p-1)})': t_{J^*l}=\alpha+\frac{k_l}{2_{J^*}}(b-a), k_l\in I_{J^*}\}$,其中$\delta_n=2^{-J}$.记$n_{\underline{s}}=\#N_n(\underline{s})$为$N_n(\underline{s})$中点的个数.

---

*收稿日期:2009-06-17
基金项目:教育部人文社会科学研究项目(07JA630027;06JA630035);山西省高校人文社科重点研究基地项目(20083006)
作者简介:刘维奇(1963-),男,山西忻州人,教授,博士生导师,从事时间序列分析与金融工程研究.E-mail:liuwq@sxu.edu.cn

$I_J=\{0,1,2,\cdots,2^J-1\}$. $\underline{x}_{l-1}=(x_{l-1},x_{l-2},\cdots,x_{l-p})'$. $\underline{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_p)'$. $k=[2^Jz]$, $0<z<1$. $\|\cdot\|$为欧氏模. 我们对模型和小波 $\psi(x)$ 作出如下的假设:

(A1) $\{x_t\}$ 是几何遍历的;

(A2) $\varepsilon^{(l)}$ 和 $\underline{x}_p=(x_p,x_{p-1},\cdots,x_1)'$ 的分布密度 $g_l(x)$ 和 $f(\underline{x})$ 分别在 $R=(-\infty,\infty)$ 和 R^p 上有界, 并且它们分别在包含原点的一个开集 U 和 U^p 上有正的下界;

(A2) $\underline{\varepsilon}$ 和 $\underline{x}_p$ 独立;

(A4) $\psi(x)$ 和尺度函数 $\phi(x)$ 都有有界变差和紧支集 $[-A,A]$, $A>1$, 当 $x\in[-1,1]$ 时 $\psi(x)=0$.

(A5) 小波函数 $\psi(x)$ 有如下性质.

$$\int_{-A}^{A}\psi(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \int_{-A}^{A}x\psi(x)\,\mathrm{d}x=0,\ \int_{1}^{A}\psi(x)\,\mathrm{d}x\neq0,\ \int_{1}^{A}\psi(x)\,\mathrm{d}x\neq0$$

由 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 可以得到 $L^2[a,b]$ 的一组正交基 $\{\phi_{i,k}^{per}(x),k\in I_i;\psi_{J,k}^{per}(x),k\in I_J,J\geqslant i\}$, 其中

$$\phi_{i,k}^{per}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{b-a}}\phi_{i,k}\left(\frac{x-a}{b-a}+n\right),\quad \psi_{J,k}^{per}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{b-a}}\psi_{J,k}\left(\frac{x-a}{b-a}+n\right)$$

以及 $\phi_{i,k}(x)=2^{\frac{i}{2}}\phi(2^ix-k)$, $\psi_{J,k}(x)=2^{\frac{J}{2}}\psi(2^Jx-k)$, $I_J=\{0,1,2,\cdots,2^J-1\}$. 本文中没有用到小波的正交性, 在定理的证明中, 我们设 $\phi_{i,k}^{per}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\phi_{i,k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, $\psi_{J,k}^{per}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\psi_{J,k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$.

任意的函数 $f(x)\in L^2[a,b]$, 函数 $f(x)$ 的小波系数定义为

$$\beta_{J,k}=\int_a^b f(x)\psi_{J,k}^{per}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

2 回归函数的小波系数的估计

文献[3]给出了 $T(\underline{x})$ 的小波系数的一个简单的估计量, 随后, 文献[4]在延时 d 已知的情况下在小波系数的估计量中引进了核估计, 但是他们的高维核函数满足条件 $K_h(\underline{x})=K\left(\frac{x_1}{h}\right)\cdot K\left(\frac{x_2}{h}\right)\cdots K\left(\frac{x_p}{h}\right)$.

设 $K(\underline{x})$ 为一核函数有有界支集 $[-C,C]^p$. 当 $T(\underline{x})$ 连续时, 我们可以给出其如下的估计量

$$T_n(\underline{y})=\frac{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})x_t}{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})}$$

其中 $\underline{x}_{t-1}=(x_{t-1},\cdots,x_{t-p})'$, $\underline{y}=(y_1,\cdots,y_p)'$. h 为窗宽, 并且当 $n\to\infty$ 时 $h\to0$ 以及 $nh^p\to\infty$.

如果 $\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}=\underline{y})=K_h(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})$, 其中 $Kh(\underline{x})=K\left(\frac{x}{h}\right)$, 则 $T_n(\underline{y})$ 为 $T(\underline{x})$ 的核估计. 核估计是由 Nadaraya[7] 和 Watson[8] 提出的.

如果 $\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})=K_h(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})(s_{n,2}-(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})s_{n,1})$, 其中 $s_{n,l}=\sum_{t=p+1}^{n}K\left(\frac{\underline{x}_{t-1}-\underline{y}}{h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})^l\right.$, $l=0,1,2$. 则 $T_n(\underline{y})$ 为 $T(\underline{x})$ 的局部线性估计. 这个估计由 Fan[9] 提出的.

文献[10]指出: 局部线性估计能够在更普遍的情况下消除偏差. 在估计回归函数的微分时也明显优于 Nadaraya-Watson 估计. 为了证明的简化, 定理证明中仅考虑核估计的情况.

现在, 我们可以给出模型(2)中回归函数 $T(\underline{x})$ 的小波系数的两种估计量, 估计量如下:

$$U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})=\int_a^b\psi_{J,k}^{per}(y_m)\frac{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})x_t}{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{y})}\mathrm{d}y_m,\ m=1,2,\cdots,p. \tag{5}$$

$$W_{J,k}^{(m)}(\underline{t}_{J^*})=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_{J,k}^{per}(s_i)\frac{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{s}_{m,i})x_t}{\sum_{t=p+1}^{n}\overline{K}_{n,h}(\underline{x}_{t-1}-\underline{s}_{m,i})},\ m=1,2,\cdots,p. \tag{6}$$

其中 $N\to\infty$, $\underline{t}_{J^*}\in R_{J^*}$, $s_i=a+i\frac{b-a}{N}$ 和 $\underline{s}_{m,i}=(t_{J^*1},\cdots,t_{J^*(m-1)},s_i,t_{J^*m},\cdots,t_{J^*(p-1)})'$.

高维核函数常用的构造方法有两种, $K(\underline{x})$ 的常用的选取方法也有两种, 见文献[11]. 可以看出我们的估

计量中不但窗宽的选取能达到最佳值, 而且也能选取到最佳的高维核函数.

(B1) $\lim_{n\to\infty} 2^{2J}\dfrac{(\log n)^3}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{5J}}{n}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}2^J h^{2p}\log n=0$.

(B2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n2^J}{(Nh^p)^2}=0$.

定理 2.1 假设(A1)-(A3)成立. 并且当 $n\to\infty$ 时 $J\to\infty$, 则

(a) 如果条件(B1)满足, 当 $m=d$ 时, 存在一点 $\underline{x}^0=(x_1^0,\cdots,x_{d-1}^0,x,x_{d+1}^0,\cdots,x_p^0)'\in R^p$, 当 $k\in I(\lambda, 2^{-J}(b-a))$ 时, 我们有

$$U_{J,k}^{(d)}(\underline{x}^0)=2^{-\frac{J}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}d_l\int_1^1\psi(x)\,\mathrm{d}x+O_p(n^{-\frac{1}{2}})$$

而当 $k\notin\bigcup_{l=1}^r I(\lambda, 2^{-J}(b-a))$ 时, 或者当 $m\neq d$ 时, 我们有

$$U_{J,k}^{(d)}(\underline{y})=O_p(n^{-\frac{1}{2}})$$

其中 $a_n=O_p(b_n)$ 表示 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=C$ 对于某个常数 C 以概率 1 成立.

(b) 如果条件(B1)-(B2)满足, (a)中的结论对离散估计量 $W_{J,k}^{(m)}(\underline{t}_J^*)$ 也成立.

引理 1 假设 $\{\underline{x}_i, i=0,1,2,\cdots\}$ 是一个严平稳混合序列. $\underline{x}_i$ 的密度函数 $f(\underline{x})$ 及其微分在 R^n 上有界并一致连续. 条件密度函数 $f(\underline{x}_0\mid\underline{x}_l)(l\neq 0)$ 有界. $K(\underline{u})$ 为一个核函数有有限支集 $[-c,c]^p$. $K(\underline{u})$ 对 u_i 的微分都连续有界. $\int K(\underline{u})\,\mathrm{d}\underline{u}=1$ 和 $\int K(\underline{u})u_m\,\mathrm{d}u_{\underline{m}}=0$, $m=1,2,\cdots,p$. 则当 $n\to\infty$ 时,

(a) 对于任意的正向量 $\underline{j}$ 满足 $0\leqslant|\underline{j}|\leqslant 2p$, 我们有

$$\sum_{i=0}^{n-p}K\left(\frac{\underline{x}_i-\underline{x}}{h}\right)(\underline{x}_i-\underline{x})^{\underline{j}}=(n-p+1)(h\underline{1})^{\underline{j}+\underline{1}}\mu_{\underline{j}}f(\underline{x})+$$
$$(n-p+1)(h\underline{1})^{\underline{j}+\underline{1}}h\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i}\mu_{\underline{j}[j_i+1]}+O[(n-p+1)(h\underline{1})^{\underline{j}+\underline{1}}\delta_{2n}]\quad a.s$$

对 $\underline{x}\in[a,b]^p$ 一致成立, 其中 $\underline{x}^{\underline{k}}=x_1^{k_1}\times\cdots\times x_p^{k_p}$, $\mu_{\underline{j}}=\int_{R^p}\underline{u}^{\underline{j}}K(\underline{u})\,\mathrm{d}\underline{u}$, $\delta_{2n}=h^2+\left(\dfrac{\log n}{nh^p}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\underline{j}=(j_1,j_2,\cdots,j_p)'$, $\underline{1}=(1,1,\cdots,1)'$, $\underline{j}[j_i+1]=(j_1,j_2,\cdots,j_{i-1},j_i+1,j_{i+1},\cdots,j_p)'$, $|\underline{j}|=\sum_{i=1}^p j_i$.

(b) $\{\varepsilon_i, i=1,2,\cdots\}$ 为 i.i.d 随机变量, $E(\varepsilon_i)=0$, $E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$, $\forall i$, ε_i 与 $\{\underline{x}_s. s\leqslant i\}$ 独立, 则

$$\sum_{i=0}^{n-p}K\left(\frac{\underline{x}_i-\underline{x}}{h}\right)\left(\frac{\underline{x}_i-\underline{x}}{h}\right)^{\underline{j}}\varepsilon_i=\begin{cases}O[(nh^p\log n)^{\frac{1}{2}}] & a.s\\ O_p((nh^p)^{\frac{1}{2}})\end{cases}$$

对 $\underline{x}\in[a,b]^p$ 一致成立.

证明 我们已经在文献[12]中证明.

引理 2 $K(\underline{x})$ 为高维核函数有有限支集 $[-c,c]^p$, $\underline{x}_j=(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jp})'$, $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)'$, 则

$$\frac{\sum_{j=p}^n K_h(\underline{x}_j-\underline{x})I(t_l\leqslant x_{jm}\leqslant b)}{\sum_{j=p}^n K_h(\underline{x}_j-\underline{x})}=I(t_l\leqslant x_m\leqslant b),\ 1\leqslant x_m\leqslant p$$

证明 证明与文献[6]中的引理 B.1 的证明类似, 故我们此处略去.

引理 3 (a) 假设 $\psi(x)$ 满足条件(A4)-(A5), 并且 $C(\underline{x})$ 的二阶微分连续. 则, 对所有的 $k\in I_J$,

$$\int_a^b\psi_{J,k}^{per}(x_m)\frac{\sum_{j=p}^n K_h(\underline{x}_j-\underline{x})[C(\underline{x}_j)-C(\underline{x})]}{\sum_{j=p}^n K_h(\underline{x}_j-\underline{x})}\mathrm{d}x_m=O_p(2^{-\frac{J}{2}}hc_n),\ 1\leqslant m\leqslant p$$

$$\int_a^b\psi_{J,k}^{per}(x_m)C(\underline{x})\,\mathrm{d}x_m=O(2^{-\frac{5J}{2}}),\ 1\leqslant m\leqslant p$$

(b) 进一步, 上面两式左端离散化后也有类似的结论. 引理中 $c_n=h^2+\left(\dfrac{\log n}{nh^p}\right)^{\frac{1}{2}}$.

证明 (a) 部分第一个等式的证明与文献[6]中的引理 A.2 的证明类似, 此处略去. 现证明第二个等式,

对于 $1\leqslant m\leqslant p$, 经过简单推导可得

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)C(\underline{x})\,\mathrm{d}x_m = 2^{-\frac{J}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}\int_{-A}^{A}\psi(y)C\left(x_1,\cdots,x_{m-1},\frac{(y+k)(b-a)}{2^J}+a,x_{m+1},\cdots,x_p\right)\mathrm{d}y$$

记 $D(x_m)=C(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x,x_{m+1},\cdots,x_p)$, $D^{(n)}=\dfrac{\partial^n C(x)}{\partial x_m^n}$. 通过泰勒展式, 我们有

$$C\left(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},\frac{(y+k)(b-a)}{2^J}+a,x_{m+1},\cdots,x_p\right) = D(0)+D'(0)\left(\frac{(y+k)(b-a)}{2^J}+a\right)+ D''(0)\left(\frac{(y+k)^2(b-a)^2}{2^{2J}}+\frac{2(y+k)(b-a)a}{2^J}+a^2\right)+O(x^2)$$

由文章中前面的假设已知 $\int_{-A}^{A}\psi(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_{-A}^{A}x\psi(x)\,\mathrm{d}x=0$. 因此

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)C(\underline{x})\,\mathrm{d}x_m = 2^{-\frac{J}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}\int_{-A}^{A}\psi(y)D''(0)\frac{y^2(b-a)^2}{2^{2J}}\mathrm{d}y = O(2^{-\frac{5J}{2}})$$

从而(a)部分成立, 同理可证(b)部分.

引理 4 $K(\underline{x})$为核函数有有限支集 $[-c,c]^p$, $d_l>0$, $l=1,2,\cdots q$. (a). 对所有的 $1\leqslant m\leqslant p$

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)\frac{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})\left[\sum_{l=1}^{q}d_l I(t_l\leqslant x_{jm}\leqslant b)\right]}{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})} = 2^{-\frac{J}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}d_l\int_1^A\psi(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

对 $k\in I(t_l,2^{-J}(b-a))$ 一致成立,

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)\frac{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})\left[\sum_{l=1}^{q}d_l I(t_l\leqslant x_{jm}\leqslant b)\right]}{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})}\mathrm{d}x_m = 0$$

对 $k\notin\bigcup_{l=1}^{q}<_l(A)$ 一致成立, 其中 $<_l(A)=\{k:|a+\dfrac{k(b-a)}{2^J}-t_l|<2^{-J}A(b-a)\}$.

(b) 进一步, 对于上面两式左端离散化后也有类似的结论.

证明 根据引理 2, 对于充分大的 n, 当 $k\in I(t_l,2^{-J}(b-a))$时, (7) 式左端=

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)\sum_{l=1}^{q}d_l I(t_l\leqslant x_m\leqslant b)\,\mathrm{d}x_m = \delta_n^{\frac{1}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{q}d_l\int_{\left(\frac{t_l-a}{b-a}-\gamma_k\right)\delta_n^{-1}}^{(1-\gamma_k)\delta_n^{-1}}\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

其中 $\delta_n=2^{-J}$, $\gamma_k=2^{-J}k$, $k=[2^jz]$, $0<z<1$.

当 $k\in I(t_l,2^{-J}(b-a))$时, 可得 $\left|\left(\dfrac{t_l-a}{b-a}-\gamma_k\right)\delta_n^{-1}\right|<1$. 而当 $i\neq l$ 时,

$$\frac{\delta_n^{-1}}{b-a}\left(a+\frac{k}{2^J}(b-a)-t_i\right)=\frac{\delta_n^{-1}}{b-a}\left(a+\frac{k}{2^J}(b-a)-t_l\right)+\frac{\delta_n^{-1}}{b-a}(t_l-t_i)\triangleq L(l)+L(i)$$

易证, 当 $n\to\infty$时 $L(i)\to\infty$, 这就意味着对于充分大的 n

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant q;\,i\neq l}d_i\int_{\left(\frac{t_i-a}{b-a}-\gamma_k\right)\delta_n^{-1}}^{(1-\gamma_k)\delta_n^{-1}}\psi(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

由此就证明了引理(a)的第一等式. 对于所有的 $k\notin\bigcup_{l=1}^{q}<_l(A)$, 我们有

$$\left(\frac{t_l-a}{b-a}-\gamma_k\right)\delta_n^{-1} = 2^J\left(\frac{t_l-a}{b-a}-\gamma_k\right) > 2^J(2^{-J}A) = A$$

从而知(a)的第二个等式成立, 同理可证(b)部分.

引理 5 (a), 假设(A1)-(A3)成立, 则我们有

$$\int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m)\frac{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})\left[\alpha(\underline{x}_{j-1})'\varepsilon_j\right]}{\sum_{j=p}^{n}K_h(\underline{x}_j-\underline{x})}\mathrm{d}x_m = O_p(n^{-\frac{1}{2}})\quad 1\leqslant m\leqslant p$$

(b) 进一步, 如果(B3) 也成立, 则上式左端离散化后也成立.

证明 与文献[6]中引理 A. 4 中的证明类似, 所以此处略去.

定理 2. 1 的证明 当 λ 是模型(2)的一个门限时, 由前面的讨论我们知道存在 $\underline{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{d-1}^0,x,x_{d+1}^0,\cdots x_p^0)'\in R^p$, 使得 $\underline{x}_l^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{d-1}^0,\lambda,x_{d+1}^0,\cdots,x_p^0)'$ 为 $T(\underline{x})$的间断点, 即, $T(x_l^0-0)\neq T(x_l^0+0)$.

我们记 $d_l = T(\underline{x}_l^0 + 0) - T(\underline{x}_l^0 - 0)$. 当 $m = d$ 知, 对于 $k \in I(\lambda, 2^{-J}(b-a))$, $T(\underline{x}_0)$ 可写成如下形式 $T(\underline{x}_0) = C(\underline{x}_0) + d_l I(\lambda \leqslant x \leqslant b)$, 其中 $C(\underline{x}_0)$ 对于 $x \in (a, b)$ 二阶微分连续.

注意到 $U_{J,k}^{(m)}(\underline{x})$ 能够分成两部分: $U_{J,k}^{(m)}(\underline{x}) = U_{J,k}^{(T)}(\underline{x}) + U_{J,k}^{(\varepsilon)}(\underline{x})$, 其中

$$U_{J,k}^{(T)}(\underline{x}) = \int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m) \frac{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}) T(\underline{x}_{j-1})}{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x})} \mathrm{d}x_m$$

$$U_{J,k}^{(\varepsilon)}(\underline{x}) = \int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_m) \frac{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}) [\alpha(\underline{x}_{j-1})' \varepsilon_j]}{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x})} \mathrm{d}x_m$$

由引理 3 和引理 4, 我们知道, 当 $m = d$ 时

$$U_{J,k}^{(T)}(\underline{x}^0) = 2^{-\frac{J}{2}}(b-a)^{\frac{1}{2}} d_l \int_1^A \psi(x)\mathrm{d}x + O_p(2^{-\frac{5J}{2}} + 2^{-\frac{J}{2}} h c_n)$$

对于 $k \in I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))$ 一致成立.

$U_{J,k}^{(T)}(\underline{x}^0) = O_p(2^{-\frac{5J}{2}} + 2^{-\frac{J}{2}} h c_n)$ 对于 $k \notin \bigcup_{i=1}^r I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))$ 一致成立. 当 $m \neq d$ 时, $U_{J,K}^{(T)}(\underline{x}_0) = O_p(2^{-\frac{5J}{2}} + 2^{-\frac{J}{2}} h c_n)$ 对于任意的 k 一致成立.

由引理 5 可得: $U_{J,k}^{(\varepsilon)}(\underline{x}) = O_p((n)^{-\frac{1}{2}})$ 对所有的 k 和 m 成立.

由上面的讨论知定理 2. 1 对连续估计量成立. 同理我们可证定理 2. 1 对离散估计量也成立.

由上面的定理我们可以看出, 当 $m \neq d$ 时, 小波系数的估计量的值在每一个点处都比较小, 而当 $m = d$ 时, 小波系数的估计量的值在门限的附近具有相对异常大的值, 而在远离门限时则有相对小的值. 利用小波系数的估计量的这个性质, 我们就可以构造门限和延时的估计量.

3 延时和门限的估计

根据定理 2. 1 我们可以给出延时的两种估计量:

$$d^{(u)} = \arg\max_m \{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})|; 1 \leqslant m \leqslant p\},\ d^{(w)} = \arg\max_m \{|W_{J,k}^{(m)}(\underline{t}_{J^*})|; 1 \leqslant m \leqslant p\}$$

定理 3. 1 假设(A1) - (A3), (B1) - (B2) 成立. 当 $n \to \infty$ 时 $J \to \infty$, 则

$$P(d^{(u)} = d) \to 1,\ P(d^{(w)} = d) \to 1$$

证明 由定理 2. 1 的结果可直接得到.

假设 $T(\underline{x})$ 在 $[a, b]$ 上仅有一个门限 λ, 我们可以构造出门限 λ 的两种估计量如下

$$\lambda^{(u)} = a + \frac{k^{(u)}(b-a)}{2^J},\ \lambda^{(w)} = a + \frac{k^{(w)}(b-a)}{2^J}$$

其中 $k^{(u)} = \arg\max_k\{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})|, m = d\}$, $k^{(w)} = \arg\max_k\{|W_{J,k}^{(m)}(\underline{t}_{J^*})|, m = d\}$.

(B3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^J}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{5J}}{n} = \infty$.

定理 3. 2 假设(A1) - (A3), (B3) 成立. 当 $n \to \infty$, 则

$$|\lambda^{(u)} - \lambda| = O_p(2^{-J}),\ |\lambda^{(w)} - \lambda| = O_p(2^{-J})$$

证明 当 $T(\underline{x})$ 只有一个间断点 $\underline{x}_l^0$ 时, 由引理 3 和引理 4 的类似的证明可得, 当 $m \neq d$ 时

$$\left| \int_b^a \psi_{J,k}^{per}(x_m) \frac{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}) T(\underline{x}_{j-1})}{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x})} \mathrm{d}x_m \right| \leqslant c 2^{-\frac{3J}{2}}$$

对所有的 k 成立. 当 $m = d$ 时, 上式对所有的 $k \notin I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))$ 成立. 其中 c 为某个常数.

由引理 4, 当 $m = d$ 及 $k \in I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))$ 时, 存在 $\underline{x}^0 = (x_1^0, \cdots, x_{d-1}^0, x, x_{d+1}^0, \cdots, x_p^0)'$ 使得

$$\left| \int_a^b \psi_{J,k}^{per}(x_d) \frac{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}^0) T(\underline{x}_{j-1})}{\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}^0)} \mathrm{d}x_d \right| \geqslant c 2^{-\frac{J}{2}}$$

由引理 1 知 $\sup_{x \in <} |\sum_{j=p+1}^n K_h(\underline{x}_{j-1} - \underline{x}) \alpha(\underline{x}_{j-1})' \varepsilon_j| = O_p((nh^p)^{\frac{1}{2}})$, 其中 $< = [a - \delta, b + \delta]^p$, $\delta > 0$. 从而可得

$$\int_a^b \phi_{J,k}^{per}(x_m)\frac{\sum_{j=p+1}^{n}K_h(\underline{x}_{j-1}-\underline{x})[\underline{\alpha}(\underline{x}_{j-1})'\varepsilon_J]}{\sum_{j=p+1}^{n}K_h(\underline{x}_{j-1}-\underline{x})}\mathrm{d}x_m = O_p((\frac{2^{-J}}{nh^p})^{\frac{1}{2}}) \quad 1\leqslant m\leqslant p$$

由上面的讨论,我们得到:$\max\{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{x})|1\leqslant m\leqslant p\} = \max\{|U_{J,k}^{(d)}(\underline{x})|, k\in I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))\}$.

这就意味着 $k^{(u)}\in I(\lambda, 2^{-J}A(b-a))$. 因此,

$$|\hat{\lambda}^{(u)}-\lambda| = |a+\frac{k^{(u)}(b-a)}{2^J}-\lambda| < 2^{-J}A(b-a)$$

同理,我们可证上式对 $\hat{\lambda}^{(w)}$ 也成立. 从而完成了定理的证明.

4 多个门限时的情况

假设模型(1)在区间$[a,b]$上有 r 个门限. 不失一般性,假设 $\lambda_i<\lambda_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,r-1$. 设 $D[0,1]$ 为概率空间,由$[0,1]$上的右连续有左极限的实值函数构成. $W(x)$ 为其上的标准维纳过程,并且 $EW(t)=0$ 和 $E(W(s)W(t))=\min(s,t)$. 我们定义变量, $Y_{n0}(x)=\delta_n^{-\frac{1}{2}}\int_0^1\phi(\frac{x-y}{\delta_n})\mathrm{d}W(y)$, $M^{(m)}(x)=f^{0.5}(\underline{x}^{(t)})U_{J,k}^{(m)}([\underline{x}^{(t)}])$, $M_*^{(m)}(x)=f^{0.5}(\underline{x}^{(t)})W_{J,k}^{(m)}([\underline{x}^{(t)}])$, 其中 $0\leqslant x\leqslant 1$, $\delta_n=2^{-J}$ 及$[\cdot]$表示取整, $\underline{x}^{(t)}=(t_1,t_2,\cdots,t_{m-1},a+x(b-a),t_m,\cdots,t_{p-1})'$, $[\underline{x}^{(t)}]=(t_1,t_2,\cdots,t_{m-1},a+[2^Jx](b-a)\delta_n,t_m,\cdots,t_{p-1})'$.

定理 4.1 假设(A1)-(A3)成立. 设 $E[(\varepsilon^{(t)})^2]=\sigma_0^2$. 对每一个 $\underline{t}\in[a,b]^{p-1}$, $\underline{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_{p-1})'$. 则

(a) 如果条件(B1),(B1)满足. 当 $m\neq d$ 时,或者当 $m=d$ 且 $T(\underline{x})$ 没有间断点,我们有 $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{(\frac{n}{\sigma_0^2})^{\frac{1}{2}}|M^{(m)}(x)|\}$ 和 $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\{(|Y_{(n0)}(x)|\}$ 具有相同的渐近分布.

(b) 如果条件(B1)和(B2)满足,(a)中结论对 $M_*^{(m)}(x)$ 也成立.

证明 直接由文献[5]中的定理2.1可得到.

上面的定理中用到了 $\underline{x}_t$ 的密度函 $f(\underline{x})$. 其核估计为 $f_n(\underline{x})=\frac{1}{(n-p+1)h^p}\sum_{i=p}^{n}K(\frac{\underline{x}_i-\underline{x}}{h})$, $K(\underline{x})$ 为一个核函数,它可以与前面的核函数不同. 易知,当用 $f_n(\underline{x})$ 来代替 $f(\underline{x})$ 时,定理4.1依然成立.

当门限的个数 r 未知时,定理4.1告诉我们,对于每一个 m,当 $T(\underline{x})$ 没有间断点时,对于每一个 $\underline{x}^{(t)}$ 点, $n^{-\frac{1}{2}}|U_{J,k}^{(m)}|<C_{1-w}$ 以概率 $1-w$ 近似成立. 因此,我们可以得到一个关键值 C^{1-w} 用于检验哪一个点是门限. 也就是说,如果 $\max_k|U_{J,k}^{(m)}(\underline{x}^{(t)})|>C_{1-w}$, 则 $\hat{\lambda}^{(u)}=a+\frac{k(b-a)}{2^J}$ 是一个门限的概率 $1-w$. 通过这种方法,我们就可以找出所有的门限来. 从而也就给出了门限个数 r 的估计. 我们分别记通过两种估计量得到的 r 的估计量为 $r^{(u)}$ 和 $r^{(w)}$.

记 $d_i=T(\underline{x}_i+0)-T(\underline{x}_i-0)$ 表示 $T(\underline{x})$ 在间断点 $\underline{x}_i$ 处的跳跃幅度,其对应的门限记为 λ_i, 不失一般性,我们假设 $|d_{i+1}|<|d_i|$, $i=1,2,\cdots,r-1$. 则门限 λ_i 的估计量构造如下:

(1) 找出 $T(\underline{x})$ 的第一个间断点 $\underline{x}_1$. 设 $k_1=\arg\max_k\{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})|, m=d\}$, $\hat{\lambda}^{(u)}=a+\frac{k_1(b-a)}{2^J}$.

(2) 找出 $T(\underline{x})$ 的第二个间断点 $\underline{x}_2$. 设 $k_2=\arg\max_{k\in Q_2}\{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})|, m=d\}$, 则: $\hat{\lambda}^{(u)}=a+\frac{k_2(b-a)}{2^J}$, 其中 $Q_2=[a,b]^p-o(\underline{x}_1, 2^{-J}A(b-a))$, $o(\underline{x}_1, 2^{-J}A(b-a))=[x_{1i}-2^{-J}A(b-a), x_{1i}+2^{-J}A(b-a)]^p$, $\underline{x}_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1p})'$.

(3) 继续上面的过程直到 $T(\underline{x})$ 的第 r 个间断点 $\underline{x}_r$. 设 $k_r=\arg\max r_{k\in Q_r}\{|U_{J,k}^{(m)}(\underline{y})|, m=d\}$, 则: $\hat{\lambda}^{(u)}=a+\frac{k_r(b-a)}{2^J}$, 其中 $Q_r=[a,b]^p-\bigcup_{i=1}^{r-1}o(\underline{x}_i, 2^{-J}A(b-a))$.

上面的步骤也适用于离散估计量 $W_{J,k}^{(m)}(\underline{t}_{J^*})$. 下面的定理则建立了上面这些估计量的收敛速度.

定理 4.2 假设(A1)-(A3),(B2)-(B3)成立. 则

$$P(r^{(u)}=r)\to 1,\ |\hat{\lambda}_i^{(u)}-\lambda_i|=O_p(2^{-J}), i=1,2,\cdots,r.$$
$$P(r^{(w)}=r)\to 1,\ |\hat{\lambda}_i^{(w)}-\lambda_i|=O_p(2^{-J}), i=1,2,\cdots,r.$$

证明: 证明与文献[6]中的定理 2.5 的证明类似, 不再赘述.

参考文献:

[1] TOGN H. On a Threshold Model [C]//Pattern Recognition and Signal Processing, NATO ASI Series E: Applied SC. No. 29(Edited by C H Chen). Sijthoff and Noordhoff, Gronianaen. 1978.

[2] CHAN K S, TONG H. On Estimating Thresholds in Autoregressive Models[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1986, **7**: 179-190.

[3] LI Y, XIE Z. The Wavelet Identification of Threshold and Time Delay of Threshold Autoregressive Models[J]. *Statistica Sinica*, 1999, **9**: 153-166.

[4] WAI I P, WONG H, LI Y, AN H. Testing and Estimation of Thresholds Based on Wavelets in Heteroscedastic Threshold Autoregressive models[J]. *Bionetrika*, 2003, **90**: 703-716.

[5] WANG Y. Jump and Sharp Cusp Detection by Wavelets[J]. *Biometrika*, 1995, **82**: 385-397.

[6] CHNE G, CHOI Y, ZHOU Y. Detections of Changes in Return by a Wavelet Smoother with Conditional Heteroscedastic Volatility[J]. *Journal of Econometrics*, 2008, **143**: 227-262.

[7] NADARAYA E A. On Estimating Regression[J]. *Theory of Probability and Its Applications*, 1964, **9**: 141-142.

[8] WATSON G S. Smooth Regression Analysis[J]. *Sankhya Series A*, 1964, **26**: 359-372.

[9] FAN J. Local Linear Regression Smoothers and Their Minimax Efficiencies[J]. *The Annals of Statistics*, 1993, **21**: 196-216.

[10] MASRY E. Multivariate Local Polynomial Regression for Time Series: Uniform and Strong Consistency and Rates[J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1996, **17**: 571-599.

[11] FAN Jian-qing, YAO Qi-wei. 非线形时间序列[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[12] 王景乐. 密度函数的核估计的收敛速度[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2008, **31**(增刊): 38-39.

Wavelet Identification of Thresholds and Time Delay in Threshold Autoregressive Models

LIU Wei-qi, WANG Jing-le

(School of Mathematical Sciences Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: Two kinds of estimators for the thresholds and time delay of threshold autoregressive models were proposed. The convergency rates of these estimators are derived and the asymptotic distributions of the statistics are established. The estimators of thresholds have been shown to have the minimax convergence rate.

Key words: thresholds; wavelets; kernel estimation; local linear estimation