高校应用数学学报
2009, 24(2): 166-174

重尾分布族及其关系图

陈　琳[1,2], 刘维奇[1]

(1.山西大学 数学科学学院, 山西太原 030006; 2.山西大学 工程学院, 山西太原 030013)

摘　要: 归纳了在文献中出现的重尾分布的概念和各类分布族, 研究了重尾子族的特征及其相互关系, 试图利用文图(Venn diagrams)直观给出重尾子族之间的关系.

关键词: 重尾分布; 重尾分布族; 关系图
中图分类号: O211.3
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2009)02-0166-09

§1　引　言

通常在讨论有关概率问题的时候, 分布函数$F(x)$起着非常重要的作用, 其尾分布函数$\overline{F}(x) = 1 - F(x)$在实际的应用中尤为重要. 例如, 在有关可靠性的分析中, 可靠度与失效率等概念都同其尾分布函数有关. 在应用中, 我们所关心的尾分布函数一般有着具体的表达式, 例如, 有关电子产品寿命的分布假定其服从指数分布; 有关误差的分布假定其服从正态分布等等. 但对于那些尾分布函数不具体的情形, 除用非参数统计方法外, 其他方法显得难以应用. 为此, 人们假定尾分布函数未知, 但尾分布函数又满足一些性质, 这在某种程度上也能满足应用的要求. 重尾分布在分支过程, 排队论和可靠性, 特别是近年来在金融工程, 数量经济和保险精算等研究领域都有广泛应用, 对重尾分布的深入研究有重要意义.

本文将目前出现于文献中的有关重尾分布的概念, 重尾子族归纳在一起, 通过研究重尾子族的特征及其相互关系, 对重尾分布给出一个比较全面的概括, 从而有助于对重尾分布更深入的理论研究和应用研究.

自上世纪60年代以来, 国外出现了大量有关重尾分布的研究文献[1-3]. 究竟什么是重尾分布? 直到现在, 仍未得出一个确切的定义来描述它, 甚至连其名称也没有完全统一化, 有时, 重尾分布(Heavy-tailed distributions)也称为胖尾(Fat-tailed), 厚尾(Thick-tailed)或长尾(Long-tailed)分布. 在以下讨论中, 把这些名称当作同义词, 在不引起混淆的情况下, 统称为重尾分布.

以下若无特别申明, 恒设X为一个非负实值随机变量(r.v.), 其分布函数d.f.记为$F(x) = P(X < x)$, 其支撑为$[0, \infty]$, 尾分布记为$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X \geq x)$. 那么$\overline{F}(0) = 1$, $\forall x \geq 0$,

收稿日期: 2006-10-17　修回日期: 2009-04-28
基金项目: 山西省高校人文社科重点研究基地项目(20083006)

有$\overline{F}(x) \geq 0$. 假定

$$0 < \mathrm{E}X = \int_0^\infty x\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty \overline{F}(x)\mathrm{d}x = \mu < \infty. \tag{1.1}$$

以下问题均在(1.1)的条件下讨论. 记:

$$V(x) = \int_0^x \overline{F}(u)\mathrm{d}u, \quad \overline{V}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(u)\mathrm{d}u, \quad F_e(x) = \frac{1}{\mu}V(x), \quad \overline{F_e}(x) = \frac{1}{\mu}\overline{V}(x).$$

显然, $F_e(x)$也是其支撑在$[0,\infty]$上的一个分布, 称为F的平衡分布(Equilibriumed)或F的积分尾分布.

在应用概率中, $F_e(x)$用来描述经典风险模型中的破产概率, 随机游走中的阶梯高度尾分布, 以及排队论中等待时间和忙时的极限分布等等.

1980年Pitman[4]指出, 在研究F的重尾特性时, 使用$R(x) = -\ln\overline{F}(x)$比$F$本身更为简单. 此外, 如果$F$存在密度函数$f$, 则$R(x)$是绝对连续的, 并有导数$r(x) = R'(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$. 在可靠性理论中, $R(x)$称为风险函数(Hazard function), $r(x)$称为风险率函数(Hazard rate function). 记平衡分布函数$F_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(u)\mathrm{d}u$, 对应于它的风险函数$R_e(x) = -\ln\overline{F_e}(x)$, 平衡风险率函数$r_e(x) = \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty \overline{F}(u)\mathrm{d}u} = \frac{\overline{F}(x)}{\overline{V}(x)}$, $(x \geq 0)$.

Embrechts等[1]引入如下重尾定义, 该定义也是应用最为广泛的一种定义.

定义1.1　称d.f.F或其相应的非负r.v.X属于重尾(Heavy-tailed)分布, 如果它不存在指数阶矩(或不存在矩母函数),即对$\forall\lambda > 0$, 有$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\lambda X} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}F(x) = \infty$, 记为$\mathcal{K}$.
称d.f.F或其相应的非负r.v.X属于轻尾(Light-tailed)分布, 如果存在某$\lambda_0 > 0$, 使得对$0 < \lambda < \lambda_0$有$\mathrm{E}\mathrm{e}^{\lambda X} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{d}F(x) < \infty$, 记为$\mathcal{K}^c$.

另外, 在文献中还出现一些其他的重尾定义, 一种是相对于正态分布而言, 以4阶中心矩为基础的.

定义1.2[5]　随机变量X称为是重尾的, 若

$$\mathrm{E}[\frac{(X-\mu_X)^4}{\sigma_X^4}] > 3,$$

其中μ_X, σ_X分别为X的期望和标准差.

正态分布的峰度(kurtosis)为3, 因此该性质被称为超过(或大于)峰度. 但是, 该定义只适用于4阶矩存在的情况下, 而且当两个自变量的4阶矩无限时, 根据这个定义根本看不出它们的差别(见[5]).

另一种是判断重尾分布的较为直观的定义.

定义1.3[1]　如果密度函数是以幂指数衰减至0的, 称该分布函数为重尾的; 如果密度函数是以指数函数衰减至0的, 称该分布函数为轻尾的.

§2 重尾子族

由于$\mathcal{K}$族成分过于复杂, 人们又提出一些性能更为优越的重尾分布子族以及其他分布子族(见[1]).

定义2.1　$\mathcal{L}$(Long-tailed)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{L}$族, 若对$\forall y > 0$(或等价地$y = 1$), 有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}\,(x-y)}{\bar{F}\,(x)} = 1, \tag{2.1}$$

或若对$\forall y>0$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}\ (x+y)}{\bar{F}\ (x)}=1. \tag{2.1$'$}$$

(2.1)式见Embrechts等[1], (2.1)$'$式见Nagaev等[6-7].

定义2.2 $\mathcal{D}$(Dominatedly varying)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{D}$族(亦称占优分布族). 若对$\forall 0<y<1$(或等价地$y=\frac{1}{2}$) 有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty, \tag{2.2}$$

或对$\forall t>1$, 有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x/t)}{\overline{F}(x)}<\infty. \tag{2.2$'$}$$

(2.2)式见Embrechts等[1], (2.2)$'$式见Nagaev等[6-7].

定义2.3[1] $\mathcal{S}$(Subexponential)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{S}$族(亦称次指数分布族), 若对$\forall n\ge 2$(或等价地$n=2$), 有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}=n,$$

其中F^{n*}表示F的n重卷积, 而$\overline{F^{n*}}=1-F^{n*}=P(X_1+\cdots+X_n>x)$表示其相应的尾分布函数.

注1

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)}=n$$

等价于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\{X_1+\cdots+X_n>x\}}{P\{\max(X_1,\cdots,X_n)>x\}}=1,\ \forall n\ge 2,$$

即$P\{X_1+\cdots+X_n>x\}\sim P\{\max(X_1,\cdots,X_n)>x\}$, 其中$X_1,\cdots,X_n$为独立同分布随机变量, 其分布函数为$F(x)$. 分布函数族$\mathcal{S}$有其现实的背景意义: 在保险数学中, 若$X_1,\cdots,X_n$表示单个索赔额, 则$P\{X_1+\cdots+X_n>x\}$表示有$n$个索赔的总和大于某个$x$的概率. 当$x$很大时, 这两者的概率是相等的. 这说明在$n$次索赔中有一次索赔的额度是非常大的, 以至于其他$n-1$次索赔相对于这次索赔而言是微不足道的. 这就是所谓的大额索赔问题, 即极端事件问题. 这类问题在现实中有很强的应用价值, 这也是重尾分布最直观的印象: 部分和$S_n(S_n=X_1+\cdots+X_n)$的分布尾部主要由最大值$M_n(M_n=\max(X_1,\cdots,X_n))$的分布尾部决定.

定义2.4[1] $\mathcal{S}^*$(Subexponential)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{S}^*$族, 若

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(t)\mathrm{d}t=2\mu,$$

其中$\mu=\int_0^\infty\overline{F}(t)\mathrm{d}t<\infty$.

注2 分布函数族$\mathcal{S}^*$的一个等价定义为:

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(t)\mathrm{d}t=\mu,$$

其中$\mu=\int_0^\infty\overline{F}(t)\mathrm{d}t<\infty$.

注3 $\mathcal{S}$族和$\mathcal{S}^*$族在文献中都称为次指数族, 这个分布族包含很多分布函数族, 如$R_{-\alpha}$(也称RV)族, ERV族, Pareto分布, Weibull分布, Lognormal分布, Benk tan der Type I型分布和Benk tan der Type II型分布. 显然$\mathcal{L}$族, $\mathcal{S}$族和$\mathcal{S}^*$族都是重尾分布族.

定义2.5 称分布函数$F(x)$与$G(x)$是弱尾等价(Weakly tail-equivalent)的, 若存在$m, M \in [0,\infty]$, 使得$m \le \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \le M$,对$\forall x \in (0,\infty)$, 记为$F \overset{w}{\approx} G$. 若$m = M$, 则称分布函数$F(x)$与$G(x)$是强尾等价(Strong tail-equivalent)的, 记为$F \overset{s}{\approx} G$.

以上这几类分布族在实际应用中虽然扮演着非常重要的角色, 但也存在很大的局限性, 即其中的分布函数是重尾的. 对于寿险这类保险索赔额的分布显然不能用上述分布函数来描述, 因为寿险这类保险索赔额的分布是轻尾的. 但是像汽车保险中的索赔额的分布则既不能用单纯的重尾分布来描述, 也不能用单纯的轻尾分布来描述. 于是在文[8-11]中引入了以下更为广泛的分布族(定义2.6-定义2.8).

定义2.6 $\mathcal{L}(\gamma)$, $\gamma \ge 0$(Long-tailed)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{L}(\gamma)$族, 若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} = \mathrm{e}^{\gamma t},\ \forall t > 0.$$

定义2.7 (a) 称定义在$[0,\infty)$上的分布函数F属于$\mathcal{S}(\gamma)(\gamma \ge 0)$当且仅当

(1) $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\overline{F^{*2}}(u)}{\overline{F}(u)} = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{\gamma x}\mathrm{d}F(x) < \infty$,

(2) $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\overline{F}(u-x)}{\overline{F}(u)} = \mathrm{e}^{\gamma x}, \forall x \in R$.

(b) $F \in \mathcal{L}(\gamma)$当且仅当$F$满足上面的(a)(2).

例1 满足$F'(x) \sim x^{-l}\mathrm{e}^{-\gamma x}\quad (x\to\infty)$的$F$均属于$\mathcal{S}(\gamma)$, 其中$l > 1$.

属于$\mathcal{S}(\gamma)$的典型例子: Pareto分布, 对数正态分布及具有规则变化尾的分布.

定义2.8 $\mathcal{S}^*(\gamma)$, $\gamma \ge 0$(Subexponential)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{S}^*(\gamma)$族, 若

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(t) = 2\mu_1,$$

其中$\mu_1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\gamma t}\overline{F}(t)\mathrm{d}t < \infty$.

显然, $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}$, $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}$, $\mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$, 这样$\mathcal{L}(\gamma)$族, $\mathcal{S}(\gamma)$族和$\mathcal{S}^*(\gamma)$族在$\gamma = 0$时为重尾分布族, 在$\gamma > 0$时为轻尾分布族.

为了研究F与F_e的关系, Su等[12]又提出了两类新的重尾子族.

定义2.9[12] $\mathcal{M}$d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{M}$族, 若F满足条件(1.1)且

$$\lim_{x\to\infty} r_e(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{V}(x)} = 0.$$

定义2.10[12] $\mathcal{M}^*$d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{M}^*$族, 若F满足条件(1.1)且

$$\limsup_{x\to\infty}\varepsilon(x) \triangleq \limsup_{x\to\infty} x r_e(x) < \infty.$$

文献[13-14]研究了下面的重尾子族:

定义2.11 $\mathcal{C}$(Consistently varying)d.f.族: d.f.F属于$\mathcal{C}$族, 若

$$\lim_{y\uparrow 1}\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1,\quad \text{或等价地}\quad \lim_{y\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

由定义1.2, 1.3知, F的轻重取决于其指数阶矩, 由于极限理论中许多结果仅仅依赖于F的幂阶矩, 因此, 苏淳等[15]又把$\mathcal{K}$族分割成两个子族.

定义2.12[15] $\mathcal{K}_1$d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{K}_1$(轻度重尾分布)族, 若$F \in \mathcal{K}$, 且对$\forall\delta > 0$, 有

$$\mathrm{E}X^\delta = \int_0^\infty x^\delta \mathrm{d}F(x) < \infty.$$

定义2.13[15] $\mathcal{K}_2$d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{K}_2$(重度重尾分布)族, 若$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_1$.

例2 $a_1=1, a_2=\frac{3}{2}, a_3=2, a_n=a_{n-1}^{n-1}, n\geq 4, \overline{F}(a_n)=P(X>a_n)=a_n^{-n-2}$. 文[15]已证该分布是重度重尾分布.

定义2.14[16] $\mathcal{R}_{-\alpha}$(或RV族)(Regularly variation) d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{R}_{-\alpha}$(或RV)族, 若对$\forall t>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)}=t^{-\alpha}$$

可等价表示为$\overline{F}(x)=L(x)x^{-\alpha}$, 其中, $L(x)$是慢变化函数, 即$\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)}=1$.

定义2.15[16] ERV(Extended regularly variation)d.f.族: 称d.f.F属于$ERV(-\alpha,-\beta)$族, 若对$\forall y>1$, 有

$$y^{-\beta}\leq\liminf_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leq\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leq y^{-\alpha},\quad y>1,$$

其中α,β是常量, 且$1<\alpha\leq\beta<\infty$.

若X为任意实值随机变量, F为其分布函数, $\mathrm{E}X<\infty$, 则对任意$t>0$, 在文[17]中定义了分布函数F_t与重尾子族$\mathcal{S}_*$. 令

$$\overline{F_t}(x)=\min(1,\int_x^{x+t}\overline{F}(u)\mathrm{d}u)\ ,\ x>0.$$

定义2.16[17] $\mathcal{S}_*$(Strongly subexponential)d.f.族: 称d.f.F属于$\mathcal{S}_*$族, 若$F\in\mathcal{S}$, 且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F_t*F_t}(x)}{\overline{F_t}(x)}=2$$

对于$t\in[1,\infty]$一致成立.

定义2.17[16] G d.f.族: 称d.f.F属于G族, 若$F\in\mathcal{S}_*$, 且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+\sqrt{x})}{\overline{F}(x)}=1$.

定义2.19[16] E d.f.族: 称d.f.F属于E族, 若$F\in\mathcal{S}_*$, 且$\exists 0<\beta<1$, 使得$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x+x^{\beta})}{\overline{F}(x)}=1$.

§3 重尾子族间的相互关系

命题3.1 $\mathcal{R}_{-\alpha}\subseteq ERV\subseteq\mathcal{C}\subseteq(\mathcal{D}\cap\mathcal{L})\subseteq\mathcal{S}_*\subseteq\mathcal{S}\subseteq\mathcal{L}\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$, $\mathcal{D}\not\subseteq\mathcal{S}$, $\mathcal{S}\not\subseteq\mathcal{D}$.

证 由定义2.14, 2.15知: 当$\alpha=\beta$时, $\mathcal{R}_{-\alpha}\subseteq ERV$. $ERV\subseteq\mathcal{C}\subseteq(\mathcal{D}\cap\mathcal{L})\subseteq\mathcal{S}_*\subseteq\mathcal{S}$证明见文[18]引理2.1(1). $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{L}\subseteq\mathcal{M}$ 证明见文[13]定理3.1(i). $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$见本文命题3.2证明. $\mathcal{D}\not\subseteq\mathcal{S}$, $\mathcal{S}\not\subseteq\mathcal{D}$见文[1].

命题3.2 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{M}^*\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$.

证 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{M}^*$ 证明见文[13]定理3.1(ii). $\mathcal{M}^*\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{K}$证明由文[13]定理2.1(1)得.

由命题3.1, 3.2知, $\mathcal{L}\cup\mathcal{D}\subset\mathcal{M}$. 下面举例说明$\mathcal{M}$确实比$\mathcal{L}\cup\mathcal{D}$大, 且$\mathcal{M}^*$确实比$\mathcal{D}$大.

例3[13] 令τ是几何随机变量, 分布为$P(\tau=n)=(1-q)q^n$, 其中$0<q<1$, $n\geq 0$, 则$X=\tau^p$, $p>1$的分布F满足: $F\in\mathcal{M}$, 但$F\notin\mathcal{D}\cup\mathcal{L}$.

例4[13] 令r.v.X的分布为$p_n=P(X=2^{n^\alpha})=c_0n^{-\beta}2^{-n^\alpha}$, $n\geq 0$, 其中$\alpha>1$, $\beta>1$, $c_0>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1$, 则r.v.X的d.f.F满足$F\in\mathcal{M}^*$但$F\notin\mathcal{D}\cup\mathcal{L}$.

命题3.3 $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{M}^*\subseteq\mathcal{K}_2\subseteq\mathcal{K}$.

证 只需证$\mathcal{M}^*\subseteq\mathcal{K}_2$即可, 证明见文[15]定理3.1.

命题3.4 $\mathcal{C}\subseteq G\subseteq E\subseteq\mathcal{S}_*$.

证 证明见文[18]引理3.1.

注4　当F为Lognormal分布, 密度函数为$f(x)=\frac{e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}$, 有$F\notin\mathcal{D}$, 则$F\notin\mathcal{C}$, 但文[18]证明$F\in G$, 表明$G$是一个比$\mathcal{C}$更大的类, 由文[17]知$F\in\mathcal{S}_*$, 则$F\in G$.

当F是Pareto分布, 尾分布为$\overline{F}(x)=(\frac{l}{x})^{\alpha}$, 其中$l>0$, $\alpha>0$, 显然$F\in\mathcal{C}$, 则$F\in G$.

注5　当F是Lognormal分布, 密度函数为$f(x)=\frac{e^{-\frac{(\log x-\log\alpha)^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}}$, 其中$\sigma>0$, $\alpha>0$, 显然$F\notin\mathcal{D}$, 进而$f\notin\mathcal{C}$, 但文[18]已证$F\in E$. 由文[14]知: $F\in\mathcal{S}_*$, 则$F\in E$.

当F是Weibull分布, 尾分布$\overline{F}(x)=\mathrm{e}^{-x^{\alpha}}$, $x\geq 0$, $\alpha\in(0,1)$, 显然$F\notin\mathcal{D}$, 进而$F\notin\mathcal{C}$, 同样文[18]证$F\in E$, 由文[17]知: $F\in\mathcal{S}_*$, 则$F\in E$.

因此, E族包括$\mathcal{C}$族, Pareto分布, Lognormal分布及Weibull分布等.

命题3.5　$\mathcal{S}^*(\gamma)\subseteq\mathcal{S}(\gamma)\subseteq\mathcal{L}(\gamma)$.

证　证明见文[8]引理5.

命题3.6　(1)若$F\in\mathcal{S}^*$, 则$F\in\mathcal{S}$, $F_e\in\mathcal{S}$. (2)若$F,G\in\mathcal{L}$, 且$F\overset{w}{\approx}G$, 则$F\in\mathcal{S}^*\Leftrightarrow G\in\mathcal{S}^*$.

证　证明见文[19-24].

命题3.7　(1)若$F\in\mathcal{S}^*(\gamma)$,则$F\in\mathcal{S}(\gamma)$,　$F_e\in\mathcal{S}(\gamma)$.

(2)若$F,G\in\mathcal{L}(\gamma)$且$F\overset{w}{\approx}G$, 则$F\in\mathcal{S}^*(\gamma)\Leftrightarrow G\in\mathcal{S}^*(\gamma)$.

证　证明见文[25]定理1, 定理2.

命题3.8　对于满足条件(1.1)的分布, 有

(1)$F\in\mathcal{M}\Leftrightarrow F_e\in\mathcal{L}$.　(2)$F\in\mathcal{M}^*\Leftrightarrow F_e\in\mathcal{C}\Leftrightarrow F_e\in\mathcal{D}$.

(3)$F\in\mathcal{M}^*\Rightarrow F_e\in\mathcal{L}\cap\mathcal{D}\Rightarrow F_e\in\mathcal{S}$.　(4)$F\in\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)\Leftrightarrow F_e\in\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$.

证　结论(1)-(3)证明见文[13]定理3.2及推论3.1, 结论(4)见文[15].

命题3.9[15]　设d.f.$F(x)$满足条件(1.1), 则$F(x)$有任意阶矩的一个充分必要条件是: 对$\forall 0<p<1$, 使得$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F^p}(x)}{\overline{V}(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F^p}(x)}{\int_x^{\infty}\overline{F}(u)\mathrm{d}u}=\infty$.

重度重尾分布族的一个等价条件可由命题3.9立即得到:

命题3.10[15]　设d.f.$F(x)$满足条件(1.1), 则$F(x)$是重度重尾分布, 当且仅当存在$0<p<1$,使得$\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F^p}(x)}{\overline{V}(x)}=\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F^p}(x)}{\int_x^{\infty}\overline{F}(u)\mathrm{d}u}<\infty$.

上面已讨论过$\mathcal{L}\cup\mathcal{D}\subset\mathcal{M}$, 苏淳[15]等人曾猜测在$\mathcal{M}$族中包含了所有满足(1.1) 的重度重尾分布, 但是, 通过对矩的阶数的讨论, 苏淳等人否定了这一猜测.

命题3.11[15]　$\mathcal{M}$族中不但未包含满足(1.1)的所有重尾分布, 甚至也未包含所有的重度重尾分布族.

例5　上述命题仍可由例4看出, 在例4中取$x_n=a_n-\frac{1}{n}$, 就有$\overline{V}(x_n)\sim\frac{1}{n}a_{n-1}^{-n-1}$, 从而$r_e(x_n)=\frac{\overline{F}(x_n)}{\overline{V}(x_n)}\sim n$, 所以$\limsup\limits_{x\to\infty}r_e(x)=\infty$. 可见, $F\notin\mathcal{M}$, 且由文[26]所证, 对$\forall 0<p<1$, 都有$\liminf\limits_{x\to\infty}\frac{\overline{F^p}(x)}{\overline{V}(x)}=0$. 故知$\liminf\limits_{x\to\infty}r_e(x)=0$.

此例告诉我们, $\mathcal{M}$族并未包括一切仅有有限阶矩的重度重尾分布$F(x)$, 且结合文[13, 27]中的讨论知, 在满足条件"$\liminf\limits_{x\to\infty}r_e(x)=0$, $\limsup\limits_{x\to\infty}r_e(x)=\infty$"的非负分布族中, 不仅有轻尾分布, 有轻度重尾分布, 而且还有重度重尾分布.

§4　重尾子族关系图

基于§3的讨论, 可以得到下面各重尾子族间的关系图:

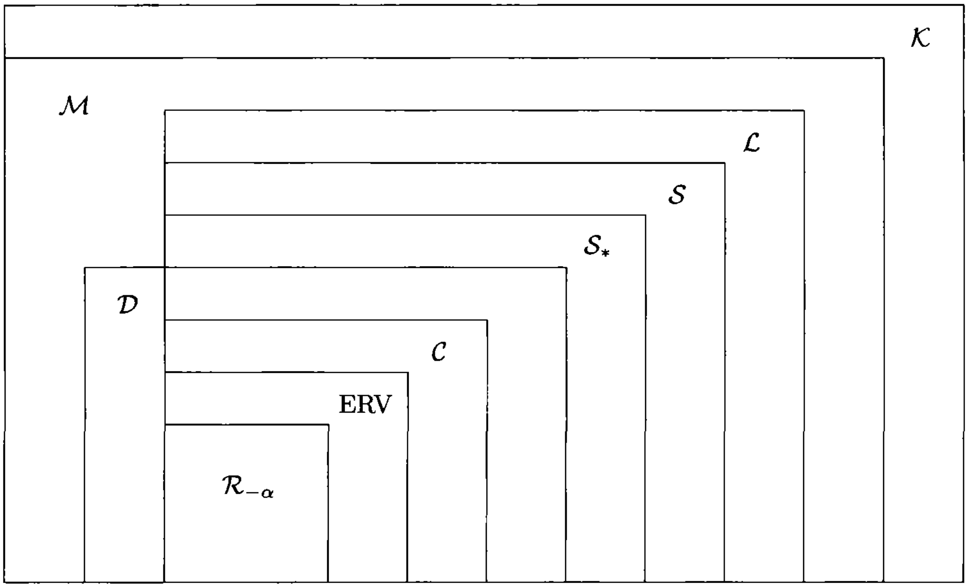

图1 $\mathcal{K},\mathcal{M},\mathcal{L},\mathcal{S},\mathcal{S}_*,\mathcal{D},\mathcal{C},ERV,\mathcal{R}_{-\alpha}$间的总关系图

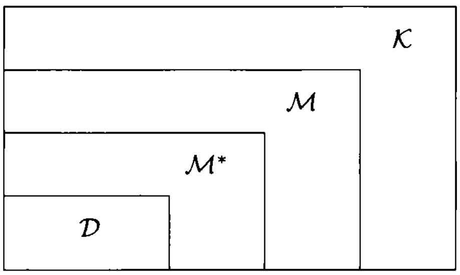

图2 $\mathcal{K},\mathcal{M},\mathcal{M}^*,\mathcal{D}$间的关系图.

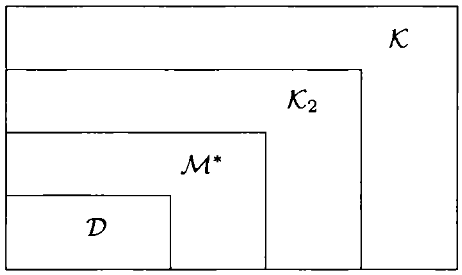

图3 $\mathcal{K},\mathcal{K}_2,\mathcal{M}^*,\mathcal{D}$间的关系图

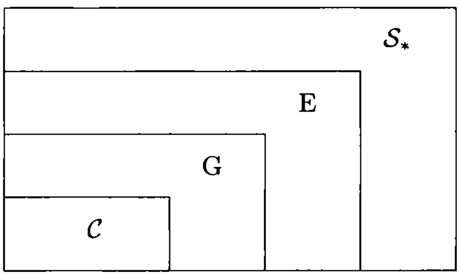

图4 $\mathcal{S}_*,E,G,\mathcal{C}$间的关系图

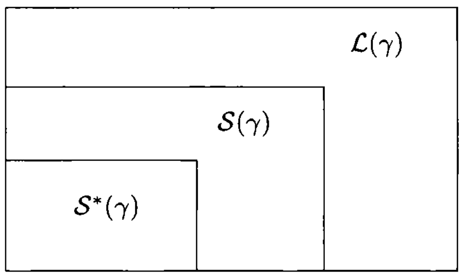

图5 $\mathcal{L}(\gamma),\mathcal{S}(\gamma),\mathcal{S}^*(\gamma)$间的关系图

§5 结束语

通过本文的讨论, 归纳研究了文献中出现的有关重尾分布的概念, 性质, 应用以及各重尾分布子族及其相互关系. 借用文(Venn)图直观描述了各重尾子族之间的相互关系, 为重尾分布更深入的理论研究和应用研究奠定了基础, 提供了方便. 但是, 通过对重尾分布子族的深入研究, 我们发现一些问题, 其中部分已解决, 但有部分问题仍未解决, 诸如: $\mathcal{M}^*$族与$\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_*$族的关系, $\mathcal{S}_*$族与$\mathcal{S}^*$族的关系, $\mathcal{D}$族, $\mathcal{L}$族与E族, G族间的关系, 这些问题有待于进一步的研究.

参考文献:

[1] Embrechts P, Kluppelberg C, Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[2] Mandjes M. Overflow behavior in queues with many long-tailed inputs[J]. J Appl Probab, 2002, 37: 1150-1167.

[3] Baltrunas A. Some asymptotic results for transient random walks with applications to insurance risk[J]. J Appl Probab, 2001, 38: 108-121.

[4] Pitman E J G. Subexponential distribution functions[J]. J Austral Math Soc Ser A, 1980, 29: 337-347.

[5] Thomas Werner, Christian Upper. Time variation in the tail behavior of bund futures returns[EB/OL]. http://www.bundesbank.de/download/volkswirtschaft/dkp/2002/200225dkp.pdf

[6] Nagaev A V. Intergral limit theorem for large deviations when Cramer's condition is not fulfilled I, II[J]. Theory Probab Appl, 1969a, 14: 51-64; 193-208.

[7] Nagaev A V. Limit theorem for large deviations when Cramer's conditions are violated[J]. Fiz-Mat Nawk, 1969b, 7: 17-22. (in Russian)

[8] 尹传存. 关于破产概率的一个局部定理[J]. 中国科学A辑, 2004, 34(2): 192-202.

[9] Embrechts P, Goldi C M. On convolution tails[J]. Stochastic Process and Their Applications, 1982, 13: 263-278.

[10] Embrechts P, Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims[J]. Insurance: Mathematica and Economics, 1982, 1: 55-72.

[11] Kluppelberg C. Subexponential distributions and characterizations of related classes[J]. Probab Theory Related Fields, 1989, 82: 256-269.

[12] Su Chun, Tang Qihe, Chen Yu, et al. A wide class of heavy-tailed distributions and its applications in insurance[J]. To appear in Russian.

[13] Su Chun, Tang Qihe. Characterizations on heavy-tailed distributions by means of hazard rate[J]. Acta Math Appl Sinica, English Series, 2003, 19(1): 135-142.

[14] Kong Fanchao. Large deviations of heavy-tailed random sums in the risk model[J]. Southeast Asia Bull Math, 2004, 128: 1049-1062.

[15] 苏淳, 胡治水, 唐启鹤. 关于非负分布重尾程度的刻画[J]. 数学进展, 2003, 10, 32(5): 606-614.

[16] Su Chun, Tang Qihe, Jiang Tao. A contribution to large deviations for heavy-tailed random sums[J]. Science in China Series A, 2001, 44(4): 438-444.

[17] Korshunov D A. Large-deviation probabilities for maxima of sums of independent random variables with negative mean and subexponental distribution[J]. Theory Probab Appl, 2002, 46: 355-365.

[18] 郭晓燕. 几个新的重尾族上随机变量和的大偏差[D]. 合肥: 安徽大学, 2005.

[19] Embrechts P, Omey E. A property of long-tailed distributions[J]. J Appl Probab, 1984, 21: 80-87.

[20] Asmussen S. Ruin Probabilities[M]. Singapore: World Scientific, 2000.

[21] Cline D B H. Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails[J]. J Austral Math Soc Ser A, 1987, 43: 347-365.

[22] Kluppelberg C. Subexponential distributions and integrated tails[J]. J Appl Probab, 1988, 25: 132-141.

[23] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, et al. Stochastic Process for Insurance and Finance[M]. New York: Wiley, 1999.

[24] Embrechts P, Goldi C M. On closure and factorization properties of subexponential and related distributions[J]. J Austral Math Soc Ser A, 1980, 29: 243-256.

[25] 周道华, 吴四方. 关于次指数族的两个性质[J]. 咸宁学院学报, 2005, 25(6): 21-23.

[26] Charles M, Goldie C M, Kluppelberg C. Subexponential distributions[EB/OL]. http://www.sussex.ac.uk/SMS/Reports/CSSM/CSSM96-06.ps

[27] Su Chun, Tang Qihe, Chen Yu, et al. Two broad classes of heavy-tailed distributions and their applications to insurance[Z]. To appear in Russian.

Classes of heavy-tailed distribution and Venn diagrams of their relations

CHEN Lin[1,2], LIU Wei-qi[1]

(1.School of Math. Sci., Shanxi Univ., Taiyuan 030006, China; 2.Engineering College of Shanxi Univ., Taiyuan 030013, China)

Abstract: This thesis summarizes the notion and all kinds of the classes of heavy-tailed distributions and researches the characters of the heavy-tailed subclasses and their relations. In this thesis, the relations of the heavy-tailed subclasses will be seen directly by using Venn diagrams.

Keywords: heavy-tailed distribution; class of heavy-tailed distribution; Venn diagram of relations

MR Subject Classification: 60E99