山西大学学报(自然科学版)33(3):380～383,2010
Journal of Shanxi University(Nat. Sci. Ed.)

文章编号:0253-2395(2010)03-0380-04

分数布朗运动与 Hurst 指数的关系研究

牛奉高[1],**刘维奇**[1,2]
(1. 山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006;2. 山西大学 管理科学与工程研究所,山西 太原 030006)

摘　要:讨论了重标极差分析(Rescaled Range Analysis,简称 R/S)方法的理论基础——分数布朗运动的相关性和自相似性,以及分数高斯噪声序列的自相关指数、自相似性、长记忆性与 Hurst 指数之间的关系. 验证了分数布朗运动当 $H \neq 1/2$ 时不是 Markov 过程,以及 Hurst 指数与其自相似指数相同等性质. 并得到了分数高斯噪声的长记忆性与 Hurst 指数之间的关系,从而可以通过 Hurst 指数来判断序列是否有长记忆性.

关键词: Hurst 指数;分数布朗运动;分数高斯噪声;自相似性
中图分类号:O211. 6　　**文献标识码**:A

水文学家 Hurst[1]在随机游走的 1/2 幂律法则(即距离的平方与时间成正比)的启发下,提出了 Rescaled Range Analysis(简称 R/S)分析方法,并得到了一个新的非参数统计量(后称为 Hurst 指数,简记为 H 指数),从而将随机过程的幂律法则推广到了一般的形式,即距离的 H 次幂与时间同阶. 20 世纪 40 年代,Hurst 基于对有偏的随机游走所进行的深入研究,结合 R/S 分析方法,发现有偏的随机游走能很好地刻画许多自然现象. Mandelbrot 在 20 世纪 60 年代也对此进行了广泛探讨,1963 年将其应用到时间序列分析中. 1968 年与 Van. Ness 对布朗运动进行推广,提出了 I 型和 II 型分数布朗运动的概念[2]. 1991 年 Peters 提出了分形市场概念,指出分数布朗运动可以准确的刻画金融市场波动. 2009 年 Davidson 通过模拟对 I 型和 II 型分数布朗运动的参数进行了估计,并就参数的无偏性做了比较和实证分析[3]. 事实上,R/S 分析方法就是以分数布朗运动理论为基础(详见下文第一部分). Hurst 指数的提出对时间序列研究有重要意义,而分数布朗运动赋予了 Hurst 指数更强的解释能力. 通过计算 Hurst 指数 H 可以判断时间序列的分形特征[4-8],2008 年 Zunino 等还研究得出了熵指数和分形特征的关系[9].

1　相关概念

由于研究时间序列性质的角度不同,部分概念往往有多种定义形式,本文基于以下定义形式进行探讨.

1. 1　自相似

一个实值随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$称为自相似的(self similar),如果对任意的 $a > 0$,存在 $b > 0$,使得$\{X(at)\} \overset{d}{=} \{bX(t)\}$. 特别地,称其为 H-自相似的(H-ss),如果任意的 $a > 0$,有$\{X(at)\} \overset{d}{=} \{a^H X(t)\}$其中 $H > 0$ 称为自相似指数,$\overset{d}{=}$是同分布的意思.

1. 2　分数布朗运动[10]:

设概率空间(Ω, F, P),$H(0 < H < 1)$为常数,称随机过程$\{B(t, H), t \geq 0\}$是参数为 H 的分数布朗运动(Fractional Brownian Motion,FBM),简记为 $BH(t)$,如果:

(a) $P\{B(0, H) = 0\} = 1$;

(b) 对任意的 $t \in R^+$,$B(t, H)$为 F 可测的随机变量,且 $E\{B(t, H)\} = 0$;

(c) 对任意的 $t, \tau \in R^+$,有

* **收稿日期**:2010-03-25;**修回日期**:2010-04-02
基金项目:山西省高校人文社科重点研究基地项目(20083006)
作者简介:牛奉高(1980-),男,山西晋城人,助教,理学硕士,主要从事概率统计的研究. E-mail:nfgao@sxu.edu.cn

$$E\{B(t,H)B(\tau,H)\} = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + \tau^{2H} - |t-\tau|^{2H}) \tag{1}$$

其中,σ为方差参数.

1.3 记忆性[11]

一个弱平稳过程,如果其 ACF 是有界的,即$|\rho(k)| \sim Cr^{|k|}$,$C>0$,$0<r<1$,则它具有短它忆性;与此相比,如果其 ACF 是以双曲率衰减,则具有长记忆性,即

$$|\rho(k)| \le Ck^{2d-1}, k \to \infty. \tag{2}$$

其中 $C \ne 0$,$0<d<0.5$.

对平稳时间序列$\{x_t\}$,$(1 \le t \le N)$,其滞后 k 阶的自相关函数为:

$$\rho(k) = \frac{E[(x_t-\mu)(x_{t+k}-\mu)]}{\sqrt{E[(x_t-\mu)^2]E[(x_{t+k}-\mu)^2]}} = \frac{E[(x_t-\mu)(x_{t+k}-\mu)]}{\sigma_x^2} = \frac{\gamma_k}{\sigma_x^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

其中,$\gamma_k = E[(x_t-\mu)(x_{t+k}-\mu)]$为滞后 k 阶的自协方差,μ为 x_t 的期望.

1.4 自相关指数

称 γ为时间序列$\{X_t\}$的自相关指数,若$\rho(k)$满足:

$$\rho(k) \propto k^{-\gamma}. \tag{3}$$

2 分数布朗运动与 Hurst 指数

设时间序列$\{x_i\}$,$(1 \le t \le N)$是布朗运动 $B(t)$的现实,作以下记号:

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{d_N}{N},$$

$$S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_N)^2, R_N = \mu_N - \nu_N$$

式中 $\mu_N = \max\limits_{1\le n\le N}\{d_n - n\bar{x}_N\}$,$\nu = \max\limits_{1\le n\le N}\{d_n - n\bar{x}_N\}$.

根据 R/S 分析方法,得到:$\frac{R_N}{S_N} = \frac{\mu_N - \nu_N}{S_N}$.

由 $x_i \sim N(\mu,\sigma^2)$,得 $d_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$,$\bar{x}_N \sim N(\mu, \sigma^2/N)$,$S_N \to \sigma$.令 $n = Nt$,$0<t<1$,有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{d_n - n\mu}{\sqrt{N}\sigma} = \lim_{N\to\infty}\frac{d_{[Nt]} - [Nt]\mu}{\sqrt{N}\sigma} = B(t).$$

由 $d_n - n\bar{x}_N = d_n - n\mu - n(\bar{x}_N - \mu)$,得

$$\frac{d_n - n\bar{x}_N}{\sqrt{N}\sigma} = \frac{d_n - n\mu}{\sqrt{N}\sigma} - \frac{n}{N}\frac{d_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \to B(t) - tB(1), 0<t<1$$

$$\frac{\mu_N - \nu_N}{\sqrt{N}\sigma} \to \max\{B(t) - tB(1)\} - \min\{B(t) - tB(1)\} \equiv Q,$$

$$\frac{R_N}{S_N} \to \frac{\mu_N - \nu_N}{\sigma} \to \sqrt{N}Q.$$

因此有$\frac{R_N}{S_N} = O(N^{1/2})$

性质 1 对分数布朗运动及以上记号,有

$$\frac{R_N}{S_N} = O(N^H), 0<H<1. \tag{4}$$

因此 R/S 分析方法计算所得的 Hurst 指数是分数布朗运动 H 参数的估计.

2.1 分数布朗运动的相关性

性质 2 当 $H \ne 1/2$ 时,分数布朗运动不是 Markov 过程

证明:设分数布朗运动 $B(t,H)$,H 为 Hurst 指数$(0<H<1)$,对任意时间 t,有:

$$E[B(t+k,H) - B(t,H)] = 0, \mathrm{Var}[B(t+k,H) - B(t,H)] = \sigma^2 k^{2H}.$$

由此可得: $E[B(t,h)B(t+k,H)] = \frac{\sigma^2}{2}((t+k)^{2H}+t^{2H}-k^{2H})$.

因此有: $E[B(t,H)(B(t+k,H)-B(t,H))] = \frac{\sigma^2}{2}((t+k)^{2H}-t^{2H}-k^{2H})$.

再利用分数布朗运动的平稳增量性,得增量的相关函数为:

$$\rho(t,k) = \frac{E[B(t,H)(B(t+k,H)-B(t,h))]}{\mathrm{Var}[B(t+k,H)-B(t,H)]} = \frac{1}{2}\frac{((t+k)^{2H}-t^{2H}-k^{2H})}{k^{2H}}.$$

特别地, $k=t$ 时,有:

$$\rho(t) = \frac{(2t)^{2H}-2t^{2H}}{2t^{2H}} = 2^{2H-1}-1 \tag{5}$$

显然,当 $H=1/2$ 时, $\rho(t)=0$,即未来的增量与过去不相关. 当 $H\neq 1/2$ 时,即分数布朗运动 $\{B(t,H)\}$ 就不是 Markov 过程了. 进一步由(5)式不难得出以下性质:

性质 3 设 $\rho(t)$ 分数布朗运动时间间隔为 t 的增量序列的自相关函数,则有:

(1) $\rho(t)$ 与 t 无关;

(2) $-0.5<\rho(t)=2^{2H-1}-1<1$;

(3) $\rho(t)\neq -1$,即不可能完全负相关;

(4) 当 $0.5<H<1$ 时, $0<\rho(t)<1$,即正相关,且 H 越接近 1 相关越强, $H=1$ 时完全正相关.

2.2 分数布朗运动的自相似性

布朗运动 $\{B(t), t\geq 0\}$ 是 1/2 - 自相似随机过程(1/2 - ss),对于分数布朗运动也有类似性质.

性质 4 分数布朗运动是自相似的,且自相似指数就是 Hurst 指数.

证明 根据 FBM 定义知,增量 $B(t+k)-B(t)$ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2 k^{2H})$,则

$$F_{BH}(x) = P(B(k)\leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma k^H}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2 k^{2H}}\right)\mathrm{d}u.$$

又

$$\begin{aligned}P(B(\gamma k)\leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\gamma k)^H}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\gamma k)^{2H}}\right)\mathrm{d}u = \\ &\gamma^{H}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma k^H}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(u/\gamma^H)^2}{2\sigma^2 k^{2H}}\right)\mathrm{d}u = \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma k^H}\int_{-\infty}^{x/\gamma^H}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2 k^{2H}}\right)\mathrm{d}s = \\ &P(B(k)\leq x/\gamma^H) = P(\gamma^H B(k)\leq x).\end{aligned}$$

因此 $B(\gamma k)$ 与 $\gamma^H B(k)$ 同分布,即 FBM 是自相似的,记为 H-ss,且自相似指数就是 H,也即 Hurst 指数.

3 分数高斯噪声与 *Hurst* 指数

分数布朗运动是非平稳的,但其增量是平稳的. 对于分数布朗运动的一步增量序列,又称为分数高斯噪声.

3.1 分数高斯噪声的自相关

引理 1[2,12] 对于分数布朗运动,其一步增量序列的 k 阶自相关函数满足:

$$\rho(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}, k\to\infty. \tag{6}$$

引理 1 说明 Hurst 指数可以反映分数布朗运动增量的相关性,并得到 Hurst 指数和自相关指数之间的等价关系.

性质 5 设分数布朗运动 $B(t,H)$,其一步增量序列的自相关指数为 γ,则有:

$$H = \frac{2-\gamma}{2} = 1-\frac{\gamma}{2}. \tag{7}$$

3.2 分数高斯噪声的长记忆性

根据分数布朗运动定义和 $\rho(k)$ 的等价形式(6)式,有 $2H-2=2d-1$, 从而

$$H = d + \frac{1}{2}. \tag{8}$$

由(8)式得到以下性质.

性质 6 分数高斯噪声具有长记忆性,如果 $0.5 < H < 1$.

这是通过计算 Hurst 指数来判断简单分形时间序列是否具有长记忆性的理论根据.

4 结论

本文在一定条件下讨论了分数布朗运动以及其离散化一步增量序列,即分数高斯噪声的自相似性、相关性及长记忆性与 Hurst 指数之间的关系,得到了一些简单而直观的结论,为实证研究提供了可靠的理论基础.如我们可以根据 Hurst 指数是否显著为 1/2 来判断序列是否为布朗运动;进一步,对于分数布朗运动的一步增量序列,如果其 H 显著大于 1/2,则可断定其具有长记忆性;根据自相关指数可以得到 Hurst 指数,也就是自相似指数.

参考文献:

[1] HURST H E. Long-term Storage Capacity of Reservoirs [J]. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 1951, **116**: 770-808.

[2] MANDELBROT B B, VAN NESS J W. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications[J]. *SIAM Review*, 1968, **10**: 422-437.

[3] JAMES DAVIDSON, NIGAR HASHIMZADE. Type I and Type II Fractional Brownian Motions: A Reconsideration[J]. *Computational Statistics and Data Analysis*, 2009(53): 2089-2106.

[4] 庄新田,庄新路,田 莹. Hurst 指数及股市的分形结构[J]. 东北大学学报, 2003, **24**(9): 862-865.

[5] 范 英,魏一鸣. 基于 R/S 分析的中国股票市场分形特征研究[J]. 系统工程, 2004, **22**(11): 46-51.

[6] 刘衡郁,甘小芳. 上证综指分形特征研究[J]. 数理统计与管理, 2005, **25**(5): 83-91.

[7] 冉茂盛,罗彦如,黄凌云. 基于分形理论下的欧元汇率波动分析[J]. 统计与决策, 2009(24): 138-139.

[8] 张洪波. 运用 Hurst 指数法对上证指数自相关性探讨[J]. 现代商贸工业, 2010(1): 177-178.

[9] ZUNINO L, PÉREZ D G, KOWALS A. Fractional Brownian Motion, Fractional Gaussian Noise, and Tsallis Permutation Entropy[J]. *Physica A*, 2008(387): 6057-6068.

[10] GUY JUMARIE. Fractional Brownian Motions Via Random Walk in the Complex Plane and Via Fractional Derivative. Comparison and Further Results in Their Fokker-Planck Equations [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, **22**: 907-925.

[11] WILLIAM A BROCK, DAVID A HSIEH, BLAKE LeBaron. Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistics Theory and Economic Evidence[M]. Boston: The MIT Press, 1991.

[12] BERAN J. Statistics for Long-memory Processes on Monographs on Statistics and Applied Probability[M]. London: Chapman Hall, 1994.

Relations of Fractional Brownian Motion and Hurst Exponent

NIU Feng-gao[1], LIU Wei-qi[1,2]

(1. *School of Mathematical Science, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*;

2. *School of Management, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)

Abstract: We discussed the theoretical foundation of the R/S analysis, that were related Hurst Exponent to self-correlation and self-similarity of the fractional Brownian motion as well as autocorrelation index, self-similarity, long memory of the fractional Gaussian noise series. These are verified that fractional Brownian motion is not Markov processes in case $H \neq 1/2$, as well as Hurst index is same as its self-similarity index. The relationship between the long memory Fractional Gaussian noise and Hurst Exponent is obtained, which can determine whether there is a long memory of the sequence via Hurst index.

Key words: Hurst exponent; fractional Gaussian Noise; fractional Brownian Motion; self similar