2012 年 6 月　　运筹学学报　　第 16 卷 第 2 期
June, 2012　　Operations Research Transactions　　Vol.16 No.2

基于 $Geo/Geo/1(E, SV)$ 排队系统的均衡止步策略 *

刘维奇 [1,2]　马 琰 [2]　李继红 [1†]

摘要 基于单重休假 $Geo/Geo/1$ 排队系统，研究顾客的均衡止步策略，首次将休假服务机制引入到离散时间排队经济学模型中．顾客基于“收入 − 支出”结构，自主决定去留．利用拟生灭过程理论，运用差分方程求解技巧，对系统进行了稳态分析，得到了顾客的平均逗留时间；进而构造适当的函数，给出了寻找均衡止步策略的具体方法并证明之；而后分析了在均衡策略下，系统的稳态行为和社会收益；最后通过数值实验讨论了系统参数对均衡行为的影响．

关键词 排队经济学，纳什均衡，预期净收益，拟生灭链，差分方程，稳态分布，均衡止步策略，社会收益

中图分类号 O226

数学分类号 90B22, 60K25

Equilibrium balking strategies in the $Geo/Geo/1(E, SV)$ queueing system

LIU Weiqi[1,2]　MA Yan[2]　LI Jihong[1†]

Abstract This paper considered the equilibrium balking strategy of customers in the $Geo/Geo/1$ queue with single vacation. To the authors' knowledge, this is the first time that the vacation policy is introduced into the economics of the discrete-time queue. The customers decide for themselves whether to enter the system or balk based on a natural reward-cost structure. Using the theory of the quasi-birth-death process and the standard approach for solving difference equation, we obtain the stationary distribution of the system and the mean sojourn time of an arriving customer. Then by introducing appropriate functions, we provide an algorithm to identify the equilibrium balking strategy. Furthermore, the resulting stationary system behavior is explored and the equilibrium social benefit is derived. Finally, we illustrate the effects of the parameters on the equilibrium behavior via numerical experiments.

Keywords economics of queues, Nash equilibrium, expected net benefit, quasi-birth-death chain, difference equations, stationary distribution, equilibrium balking strategy, social benefit

Chinese Library Classification O226

2010 Mathematics Subject Classification 90B22, 60K25

收稿日期：2011 年 9 月 9 日

* 基金项目：教育部人文社会科学研究项目 (10YJC630114, 07JA630027)，博士后研究项目 (92169).

1. 山西大学管理学院，太原 030006; College of Management, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

2. 山西大学数学科学学院，太原 030006; College of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China

† 通讯作者 Corresponding author

0 引 言

近年来，对排队系统进行经济分析，受到了学者们的广泛关注．这方面的工作是由 Naor[1] 与 Edelson 和 Hildeband[2] 开创的．他们建立的经济分析框架中，顾客拥有决策权，可以根据掌握的信息，从自身利益出发做出决定．这一观点不同于以往研究排队系统的传统观点：即顾客没有决策权，即使系统中存在一些动态控制，也是服务机构做出调整后，顾客直接被动接受．但是，这种研究框架能更好地模拟真实的排队系统．由于系统模型本质上是顾客之间的博弈，从而寻找均衡策略就成为研究的首要问题．

研究早期，文献 [1-2] 通过建立一个简单的“收入 - 支出”结构，讨论了怎样管理和控制 $M/M/1$ 排队系统，得到了顾客均衡策略和社会最优策略．文献 [3-4] 基于经典排队系统，将启动时间、中断和维修等特性加入模型，研究顾客的均衡策略．文献 [5-6] 分别在优先权、可视排队等条件下，对顾客的均衡门限策略进行了深入地探讨．文献 [7] 假设顾客只知道服务时间的部分信息，从顾客是风险中立的和风险规避的两个方面给出了均衡策略．这一领域的基本结果详见 Hassin 和 Haviv 编写的专著 [8].

从顾客的角度出发来研究排队系统中的策略问题，不仅可以为顾客决策提供优化建议，而且可以为管理者研究排队系统中的定价问题提供理论参考，具有一定的现实意义．然而，已有的研究都是基于经典排队模型，从未涉及到休假服务机制，直到孙微 [9] 研究了不可视 $M/M/1(MV)$ 排队的均衡策略．由于引入休假服务机制后，排队经济学模型会变得复杂，给研究工作带来一定的难度，所以至今还没有其它相关文献问世．另一方面，许多文献对离散时间休假排队系统进行了研究，如 [10-11]，但目前还罕有学者对这种模型进行经济分析．本文把顾客的决策行为与休假排队模式集成在一起，研究 $Geo/Geo/1(E,SV)$ 排队的均衡止步策略，首次把休假思想引入到离散时间排队系统的经济分析中．

本文安排如下：第 1 节描述系统模型，介绍顾客的“收入 - 支出”结构；第 2 节根据拟生灭过程理论，通过求解差分方程 [12]，对系统进行稳态分析；第 3 节求出顾客的平均逗留时间，进而引入适当的函数，寻找均衡止步策略并证明之，而后计算在均衡策略下，系统的稳态分布和社会收益；第 4 节进行数值实验，分析系统各指标对均衡止步策略、社会收益的影响．

1 模型的描述

考虑 $Geo/Geo/1$ 离散时间排队系统，顾客到达时，只告知队长信息，不告知服务员的状态信息 (即部分可视)．系统中只有一名服务员，每次只能服务一位顾客，当系统为空时，服务员立即进行休假．如果休假返回后，系统中有顾客等待，则服务员立即开始为顾客服务；否则，服务员进入闲期，直到下一位顾客到来，立即由闲期转为忙期．顾客到达只能发生在 $t=n^-$，$n=0,1,2,\cdots$，到达间隔独立同分布且服从参数为 p 几何分布 $(0<p<1)$；服务的开始与结束均发生在 $t=n$，$n=0,1,2,\cdots$，服务时间独立同分布且服从参数为 μ 的几何分布 $(0<\mu<1)$；休假的开始与结束均发生在 $t=n^-$，$n=0,1,2,\cdots$，休假时间独立同分布且服从参数为 θ 的几何分布 $(0<\theta<1)$，即平均休假长度为 $1/\theta$．到达间隔、服务时间、休假时间都是相互独立的，且服务规则为先到先服务．为保证系统稳定，令 $p<\mu$.

设 Q_n 表示系统在 $t=n^+$ 时的顾客数，按上述约定，在 $t=n^+$ 时完成服务离去的顾客不再计入 Q_n. 记

$$J_n=\begin{cases}0, & t=n^+\text{ 时系统处于休假状态};\\ 1, & t=n^+\text{ 时系统处于工作状态}.\end{cases}$$

则 $\{Q_n,J_n\}$ 是一个拟生灭过程. 状态 $(0,1)$ 表示系统处于闲期；状态 $(k,1)$, $k\geqslant 1$, 表示系统处于忙期且其中有 k 个顾客；状态 $(k,0)$, $k\geqslant 0$, 表示系统处于休假期且其中有 k 个顾客. 在部分可视排队中，顾客只知道 Q_n, 不知道 J_n. $Q_n=k$, $k\geqslant 0$ 表示系统处于状态 $(k,0)$ 或者处于状态 $(k,1)$.

我们感兴趣的是，到达顾客从自身利益出发，在何种情况下进入系统 (或止步) 是最优的. 为方便描述顾客的决策过程，下面介绍“收入 - 支出”结构. 设顾客在系统中每单位逗留时间的支出为 C 个单位，完成一次服务的收入为 R 个单位. 为使模型分析有意义，假设

$$R>\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}\right)C. \tag{1}$$

这一条件保证了当系统为空时，到达顾客承担的由服务时间和休假时间带来的支出低于完成服务的收入，即预期净收益为正值；否则，预期净收益为负值，当系统为空后，将不会有顾客进入系统. 此外，假设顾客是风险中性的，并且做出决定 (加入排队或止步) 后，不再反悔.

令 B 表示到达顾客的预期净收益， $Pr(J^-=0\mid Q^-=k)$ 表示队长 $Q_n=k$ 时，服务员处于休假状态的概率. 若第 $k+1$ 位顾客加入排队，则他的平均逗留时间为

$$\frac{k+1}{\mu}+\frac{Pr(J^-=0\mid Q^-=k)}{\theta},$$

从而

$$B=R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{CPr(J^-=0\mid Q^-=k)}{\theta}. \tag{2}$$

当预期净收益为正值时，到达顾客才会愿意加入排队. 所以，系统中存在门限，当排队顾客数低于给定值 (门限) 时，顾客选择进入系统. 假设到达顾客服从止步策略 (Q_e,q_e), $Q_e\in\boldsymbol{N}$, $q_e\in[0,1)$ ：若 $Q_n\leqslant Q_e-1$ 则进入系统；若 $Q_n=Q_e$, 则以概率 q_e 进入系统，或以概率 $1-q_e$ 止步；若 $Q_n=Q_e+1$, 则止步.

基于上述框架，顾客的决策过程实质上是他们之间的对称博弈. 设顾客的策略集为 S, 支付函数为 F, 在到达顾客的决策瞬间，令 $F(a,b)$ 表示当此顾客选择策略 a, 而他之前和之后的其他顾客选择策略 b 时的支付函数. 若对 $\forall s\in S$, $\exists s_e\in S$, 满足 $F(s_e,s_e)\geqslant F(s,s_e)$, 那么我们称 s_e 是一个 (对称纳什) 均衡策略. 事实上，每位顾客的策略都是对其他顾客的策略的最优反应 (纳什均衡的思想). 当所有顾客选择均衡策略时，没有任何单个顾客有积极性选择其它策略使自己获得更大收益，从而没有顾客有积极性打破这种均衡. 我们的目标是寻找均衡的 (Q_e,q_e) 止步策略.

2 稳态分析

顾客基于“收入 - 支出”结构，根据预期净收益情况进行决策．由 (2) 知，我们需要首先求解系统的稳态分布，得到 $Pr(J^-=0\mid Q^-=k)$.

$\{Q_n,J_n\}$ 的状态转移图如下，其中状态空间 $\Omega=\{(k,j)\mid 0\leqslant k\leqslant Q_e+1,\ j=0,1\}$. 以下规定，对任意实数 $x\in(0,1)$, 记 $\overline{x}=1-x$.

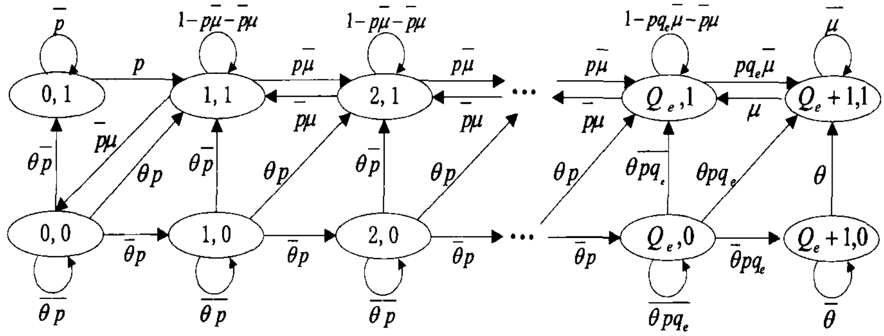

图 1 (Q_e, q_e) 止步策略下的状态转移图

转移概率矩阵:

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & & & \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1 & & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{C}_1 & \\ & & & & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{C}_2 \\ & & & & & \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}\overline{\theta}\overline{p} & \theta\overline{p}\\ 0 & \overline{p}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}\overline{\theta}p & \theta p\\ 0 & p\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \overline{p}\mu & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\overline{\theta}\overline{p} & \theta\overline{p}\\ 0 & 1-p\overline{\mu}-\overline{p}\mu\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}\overline{\theta}p & \theta p\\ 0 & p\overline{\mu}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \overline{p}\mu\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}\overline{\theta}\overline{pq_e} & \theta\overline{pq_e}\\ 0 & 1-\overline{p}\mu-pq_e\overline{\mu}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}\overline{\theta}pq_e & \theta pq_e\\ 0 & pq_e\overline{\mu}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}\overline{\theta} & \theta\\ 0 & \overline{\mu}\end{bmatrix}.$$

令 (Q,J) 表示过程 $\{Q_n,J_n\}$ 的稳态极限，记

$$\begin{aligned}\pi_{kj}&=P(Q=k,J=j),\quad (k,j)\in\Omega,\\ \pi_k&=(\pi_{k0},\pi_{k1}),\quad 0\leqslant k\leqslant Q_e+1,\\ \boldsymbol{\pi}&=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{Q_e+1}).\end{aligned}$$

根据拟生灭过程的平稳条件 $\pi\widetilde{P}=\pi$, 我们得到以下方程组:

$$\pi_{00}=\overline{\theta}\overline{p}\pi_{00}+\overline{p}\mu\pi_{11}, \tag{3}$$

$$\pi_{k0}=\overline{\theta}p\pi_{k-1,0}+\overline{\theta}\overline{p}\pi_{k0},\quad k=1,2,\cdots,Q_e-1, \tag{4}$$

$$\pi_{Q_e,0}=\overline{\theta}p\pi_{Q_e-1,0}+\overline{\theta}\overline{pq_e}\pi_{Q_e,0}, \tag{5}$$

$$\pi_{Q_e+1,0}=\overline{\theta}pq_e\pi_{Q_e,0}+\overline{\theta}\pi_{Q_e+1,0}, \tag{6}$$

$$\pi_{01}=\theta\overline{p}\pi_{00}+\overline{p}\pi_{01}, \tag{7}$$

$$\pi_{11}=\theta p\pi_{00}+p\pi_{01}+\theta\overline{p}\pi_{10}+(1-p\overline{\mu}-\overline{p}\mu)\pi_{11}+\overline{p}\mu\pi_{21}, \tag{8}$$

$$\pi_{k1}=\theta p\pi_{k-1,0}+p\overline{\mu}\pi_{k-1,1}+\theta\overline{p}\pi_{k0}+(1-p\overline{\mu}-\overline{p}\mu)\pi_{k1}+\overline{p}\mu\pi_{k+1,1},\quad k=2,3,\cdots,Q_e-1, \tag{9}$$

$$\pi_{Q_e,1}=\theta p\pi_{Q_e-1,0}+p\overline{\mu}\pi_{Q_e-1,1}+\theta\overline{pq_e}\pi_{Q_e,0}+(1-pq_e\overline{\mu}-\overline{p}\mu)\pi_{Q_e,1}+\mu\pi_{Q_e+1,1}, \tag{10}$$

$$\pi_{Q_e+1,1}=\theta pq_e\pi_{Q_e,0}+pq_e\overline{\mu}\pi_{Q_e,1}+\theta\pi_{Q_e+1,0}+\overline{\mu}\pi_{Q_e+1,1}. \tag{11}$$

由 (3) 得: $$\pi_{11}=\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{p}\mu}\pi_{00}.$$

由 (4) 得: $$\pi_{k0}=\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k\pi_{00},\quad k=1,2,\cdots,Q_e-1.$$

由 (5) 得: $$\pi_{Q_e,0}=\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{pq_e}}\pi_{Q_e-1,0}.$$

由 (6) 得: $$\pi_{Q_e+1,0}=\frac{\overline{\theta}pq_e}{\theta}\pi_{Q_e,0}.$$

由 (7) 得: $$\pi_{01}=\frac{\theta\overline{p}}{p}\pi_{00}.$$

由 (9) 可知 $\{\pi_{k1}\mid k=1,2,\cdots,Q_e\}$ 是如下常系数非齐次线性差分方程的解:

$$\begin{aligned}\overline{p}\mu y_{k+1}-(p\overline{\mu}+\overline{p}\mu)y_k+p\overline{\mu}y_{k-1}&=-\theta p\pi_{k-1,0}-\theta\overline{p}\pi_{k0}\\&=-\frac{\theta}{\overline{\overline{\theta}}}\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k\pi_{00},\quad k=2,3,\cdots,Q_e-1.\end{aligned} \tag{12}$$

根据此类差分方程的求解技巧, 以下只考虑常规情形, 假设 $\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\neq\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}$, 特殊情形可以通过取极限逼近得到.

(12) 的齐次差分方程的特征方程:

$$\overline{p}\mu y^2-(p\overline{\mu}+\overline{p}\mu)y+p\overline{\mu}=0,$$

根为 1 、 $\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}$. 从而, 齐次差分方程

$$\overline{p}\mu y_{k+1}-(p\overline{\mu}+\overline{p}\mu)y_k+p\overline{\mu}y_{k-1}=0$$

的通解为

$$y_k=D1^k+E\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^k.$$

因为 (12) 的非齐次部分是关于 $\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}$ 成几何倍数增长的，所以其特解为 $y_k^*=F\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k$，代入 (12) 得： $F=\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\pi_{00}$. 故原差分方程 (12) 的通解为：

$$y_k=D1^k+E\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^k+F\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k,\ k=1,2,\cdots,Q_e.$$

当 $k=1,2$ 时，有以下方程组：

$$\begin{cases} D+E\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)+F\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)=\pi_{11}=\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{p}\mu}\pi_{00}. \\ D+E\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^2+F\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^2=\pi_{21}=\frac{(p\overline{\mu}+\overline{p}\mu)(1-\overline{\theta}\overline{p})^2-\overline{p}\mu\theta(1-\overline{\theta}\overline{p}^2)}{(\overline{p}\mu)^2(1-\overline{\theta}\overline{p})}\pi_{00}. \end{cases}$$

由于求解过程复杂，我们通过 Matlab 编程求得：

$$D=0,\quad E=\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\pi_{00}.$$

故

$$\pi_{k1}=\left[\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^k+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k\right]\pi_{00},\quad k=1,2,\cdots,Q_e.$$

然后，由 (11) 可得：

$$\begin{aligned}\pi_{Q_e+1,1}=&\left[\frac{pq_e\overline{\mu}}{\mu}\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^{Q_e}+\left(\frac{pq_e}{\mu}\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{1-\overline{\theta}\overline{pq_e}}\right)+\frac{pq_e\overline{\mu}}{\mu}\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right.\\ &\left.\cdot\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}\right]\pi_{00}.\end{aligned}$$

最后，由正规化条件 $\boldsymbol{\pi}e=1$, 可计算出 π_{00} 的表达式：

$$\begin{aligned}\pi_{00}=&\left[\frac{\mu(\overline{\theta}p^2+\theta^2\overline{p}+\theta p)}{\theta p(\mu-p)}+\frac{\mu\overline{\mu}(pq_e-p)-\overline{\mu}p^2q_e}{\mu(\mu-p)}\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^{Q_e}\right.\\ &\left.+\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\mu\theta}\left(\frac{\theta pq_e+\mu\theta\overline{pq_e}-\mu^2}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}+\frac{\theta pq_e+\mu\theta\overline{pq_e}+\mu pq_e}{1-\overline{\theta}\overline{pq_e}}\right)\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}\right]^{-1}.\end{aligned}\tag{13}$$

至此，我们得到了在 (Q_e,q_e) 止步策略下，$Geo/Geo/1(E,SV)$ 排队系统的稳态分布.

3 均衡止步策略

基于系统的稳态分布结果，由

$$Pr(J^-=0|Q^-=k)=\frac{p\pi_{k0}}{p\pi_{k0}+p\pi_{k1}},\quad k=1,2,\cdots,Q_e+1$$

得：

$$Pr(J^-=0|Q^-=k)=\left[1+\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right]^{-1},$$
$$k=1,2,\cdots,Q_e-1, \tag{14}$$

$$Pr(J^-=0|Q^-=Q_e)=\left[1+\frac{\theta+\overline{\theta}pq_e}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1}, \tag{15}$$

$$Pr(J^-=0|Q^-=Q_e+1)=\left[1+\frac{\overline{\mu}\theta}{\mu\overline{\theta}}\frac{\theta+\overline{\theta}pq_e}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)+\frac{\theta}{\mu\overline{\theta}}\right]^{-1}. \tag{16}$$

从而，在部分可视排队系统，顾客的平均逗留时间 $\frac{k+1}{\mu}+\frac{Pr(J^-=0|Q^-=k)}{\theta}$ 便得到了.

为了方便寻找均衡止步策略，由 (2) 及上面得到的平均逗留时间，我们构造下列函数：

$$h(k,x)=R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta+\overline{\theta}px}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1},\quad x\in[0,1],\quad k\in\mathbf{N}. \tag{17}$$

$$h_U(k)=h(k,1)=R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right]^{-1},\quad k\in\mathbf{N}. \tag{18}$$

$$h_L(k)=h(k,0)=R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1},\quad k\in\mathbf{N}. \tag{19}$$

显然，

$$h_U(0)=R-\frac{C}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left(1+\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}\right)^{-1}>0,$$
$$h_L(0)=R-\frac{C}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left(1+\frac{\theta}{\theta+\overline{\theta}p}\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}\right)^{-1}>0,$$
$$\lim_{k\to\infty}h_U(k)=\lim_{k\to\infty}h_L(k)=-\infty.$$

从而，存在 k_U 使得

$$h_U(0),h_U(1),h_U(2),\cdots,h_U(k_U)>0,\quad h_U(k_U+1)\leqslant 0. \tag{20}$$

由于对每一个固定的 k, $h(k,x)$ 是关于 x 的增函数 (可以证明 x 的系数大于 0), 于是 $h_L(k)\leqslant h_U(k)$, $k=0,1,2\cdots$. 特别地,

$$h_L(k_U+1)\leqslant h_U(k_U+1)\leqslant 0.$$

又因为 $h_L(0)>0$,$h_L(k_U+1)\leqslant 0$, 故存在 $k_L\leqslant k_U$ 满足

$$h_L(k_L)>0,\quad h_L(k_L+1),\cdots,h_L(k_U),h_L(k_U+1)\leqslant 0. \tag{21}$$

定理 1 在部分可视 $Geo/Geo/1(E,SV)$ 排队系统，到达顾客服从止步策略 (Q_e,q_e): 若 $Q_n\leqslant Q_e-1$, 则进入系统；若 $Q_n=Q_e$, 则以概率 q_e 进入系统，或以概率 $1-q_e$ 止步；若 $Q_n=Q_e+1$, 则止步. 如下所述的 (Q_e,q_e) 止步策略是均衡的.

当 $k_L=k_U$ 时，存在唯一均衡止步策略， $Q_e=k_L+1$, $q_e=0$;

当 $k_L<k_U$ 时，存在多个均衡止步策略， $Q_e=k_L+1,\cdots,k_U$,

$$q_e=\frac{1}{\bar\theta p}\left[\frac{\theta+\bar\theta p}{\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\bar\theta\overline{p})}{\mu\bar\theta\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)}\left(\frac{C}{\theta\left(R-\frac{C(Q_e+1)}{\mu}\right)}-1\right)-\theta\right].$$

证明 假设顾客到达时系统中有 k 位顾客:

(I) 当 $k_L=k_U$ 时， $Q_e=k_L+1=k_U+1$, $q_e=0$.

1) 若 $k\leqslant Q_e-1$, 由 (2),(14),(18) 和 (20) 可得，此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned}B&=R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\bar\theta\overline{p})}{\mu\bar\theta\overline{p}}\right)^{k}+\left(\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right]^{-1}\\&=h_U(k)>0.\end{aligned}$$

从而，顾客选择加入排队.

2) 若 $k=Q_e$, 由 (2),(15),(18) 和 (20) 可得，此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned}B=&R-\frac{C(Q_e+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta+\bar\theta pq_e}{\theta+\bar\theta p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\bar\theta\overline{p})}{\mu\bar\theta\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1}\\<&R-\frac{C(Q_e+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\bar\theta\overline{p})}{\mu\bar\theta\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\bar\theta\overline{p}}{\bar\theta\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right]^{-1}\\=&h_U(Q_e)\leqslant 0.\end{aligned}$$

从而，顾客选择止步，即 $q_e=0$, 故系统中不会出现 $k=Q_e+1$.

(II) 当 $k_L<k_U$ 时，对任意的 $Q_e\in\{k_L+1,\cdots,k_U\}$, q_e 是 $h(Q_e,x)=0$ 的唯一根. 因为 $h(k,x)$ 是 x 的连续函数，并且 $h_L(Q_e)h_U(Q_e)=h(Q_e,0)h(Q_e,1)\leqslant 0$, 所以 q_e 是一个概率. 当 $q_e=1$ 时， $(Q_e,1)$ 策略即为 $(Q_e+1,0)$ 策略，故以下仅对 $q_e\in[0,1)$ 进行讨论.

1) 若 $k \leqslant Q_e-1$, 由 (2),(14),(18) 和 (20) 可得，此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned}B =&R-\frac{C(k+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{k}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right]^{-1}\\ =&h_U(k)>0.\end{aligned}$$

从而，顾客选择加入排队.

2) 若 $k=Q_e$, 由 (2),(15) 和 (17) 可得，此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned}B =&R-\frac{C(Q_e+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta+\overline{\theta}pq_e}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1}\\ =&h(Q_e,q_e)=0.\end{aligned}$$

从而，顾客对加入排队还是止步是中立的，特别地，由均衡的思想知，以概率 q_e 进入是理想的.

注：若 $q_e^{'}<q_e$, 则 $B<0$, 不能达到均衡；若 $q_e^{'}>q_e$, 则 $B>0$, 顾客愿意进入系统，即 $q_e^{'}=1\bar{\in}[0,1)$.

3) 若 $k=Q_e+1$, 由 (2),(16),(19) 和 (21) 可得，此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned}B =& R-\frac{C(Q_e+2)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\overline{\mu}\theta}{\mu\overline{\theta}}\frac{\theta+\overline{\theta}pq_e}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right.\\ &\left.+\frac{\theta}{\mu\overline{\theta}}\right]^{-1}\\ <& R-\frac{C(Q_e+2)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\overline{\mu}\theta}{\mu\overline{\theta}}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)+\frac{\theta}{\mu\overline{\theta}}\right]^{-1}\\ =& R-\frac{C(Q_e+2)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta\overline{p}}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e+1}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1}\\ <& R-\frac{C(Q_e+2)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta}{\theta+\overline{\theta}p}\left(\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{\overline{\mu}(1-\overline{\theta}\overline{p})}{\mu\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e+1}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\right]^{-1}\\ =& h_L(Q_e+1)\leqslant 0.\end{aligned}$$

从而，顾客选择止步.

所以，定理所述的 (Q_e,q_e) 止步策略是均衡的.

注：当 $k_L=k_U$ 时，均衡策略 (Q_e,q_e) 属于纯门限策略；当 $k_L<k_U$ 时，均衡策略 (Q_e,q_e) 属于混合门限策略.

命题 2　在部分可视 $Geo/Geo/1(E,SV)$ 排队，顾客服从均衡止步策略 (Q_e,q_e), 系统

的稳态概率 $\{\pi_k|0\leqslant k\leqslant Q_e+1\}$ 如下：

$$\pi_0=\left(1+\frac{\theta\overline{p}}{p}\right)\pi_{00},$$

$$\pi_k=\left[\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^k+\frac{\mu}{\overline{\theta}\overline{p}-\mu}\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^k\right]\pi_{00},\quad k=1,2,\cdots,Q_e-1$$

$$\pi_{Q_e}=\left[\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^{Q_e}+\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}+\frac{\theta+\overline{\theta}p}{\theta+\overline{\theta}pq_e}\right)\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}\right]\pi_{00},$$

$$\begin{aligned}\pi_{Q_e+1}=&\left[\frac{pq_e\overline{\mu}}{\mu}\left(\frac{\theta\overline{p}}{p\overline{\mu}}-\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\left(\frac{p\overline{\mu}}{\overline{p}\mu}\right)^{Q_e}+\left(\frac{\theta+\overline{\theta}p}{\theta+\overline{\theta}pq_e}\left(\frac{\overline{\theta}pq_e}{\theta}+\frac{pq_e}{\mu}\right)\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{pq_e\overline{\mu}}{\mu}\left(\frac{1-\overline{\theta}\overline{p}}{\overline{\theta}\overline{p}-\overline{\mu}}\right)\right)\left(\frac{\overline{\theta}p}{1-\overline{\theta}\overline{p}}\right)^{Q_e}\right]\pi_{00}.\end{aligned}$$

注： π_{00} 见 (13) 式， $\pi_k=\pi_{k0}+\pi_{k1}$， $k=0,1,2,\cdots,Q_e+1$.

由 PASTA 性质，在部分可视的 $Geo/Geo/1(E,SV)$ 排队，到达顾客的止步概率为：

$$\pi_{Q_e}(1-q_e)+\pi_{Q_e+1},$$

因此，单位时间的均衡社会收益：

$$SB=p(1-\pi_{Q_e}(1-q_e)-\pi_{Q_e+1})R-C\left(\sum_{k=0}^{Q_e+1}k\pi_k\right).$$

4 数值实验

前面我们得到了均衡止步策略 (Q_e,q_e) 和单位时间的均衡社会收益 SB, 下面分析它们对系统参数的敏感性. 不失一般性，假设顾客每单位逗留时间的支出 $C=1$. 图 2- 图 4 给出了 Q_e, q_e, SB 关于参数 R, p, θ 的变化情况.

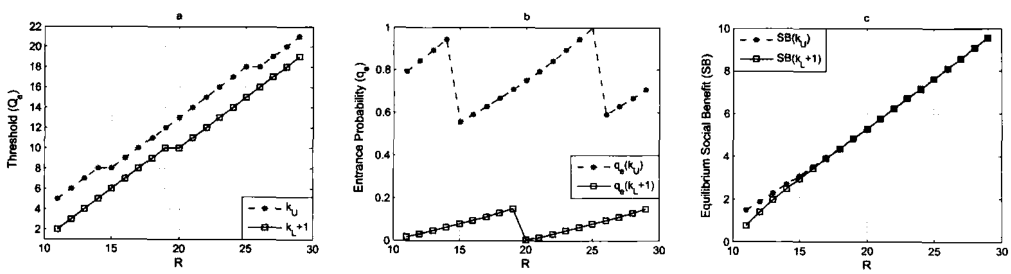

图 2 关于参数 R 的变化图 ($\mu=0.9;\theta=0.1;p=0.5;C=1.$)

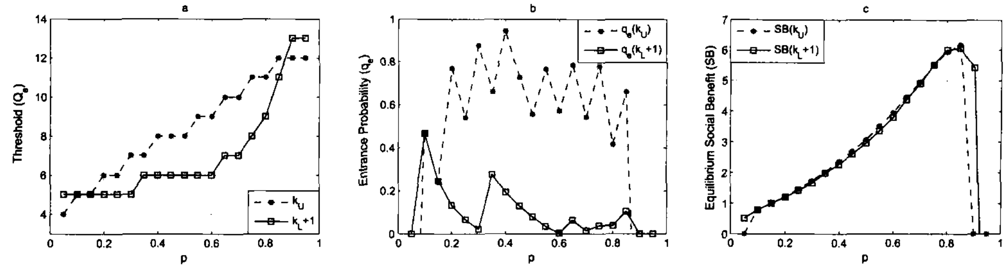

图 3 关于参数 p 的变化图 ($\mu=0.9;\theta=0.1;R=15;C=1.$)

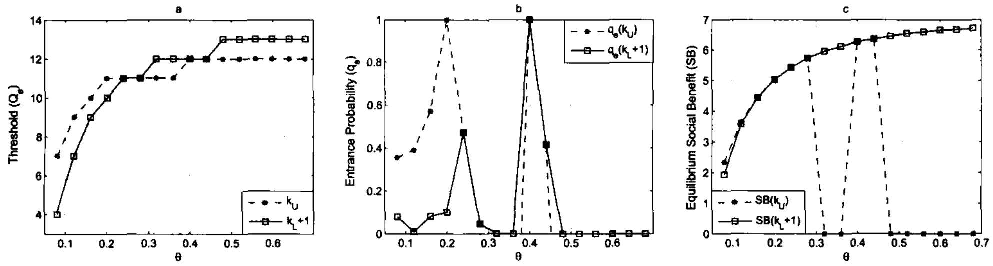

图 4 关于参数 θ 的变化图 ($\mu=0.9;p=0.5;R=15;C=1.$)

我们发现门限端点 k_L+1, k_U 随着 R,p,θ 的增大而呈增长趋势，当参数在一定范围内变化时，门限保持不变. 进入概率 $q_e(k_L+1)$, $q_e(k_U)$ 随着 R,p,θ 的增大而起伏变化；当门限端点取拐点处的值时，对应的进入概率取到极值. 此外，均衡社会收益 SB 的图像与门限的增长趋势大体相似，受进入概率的影响较小. 事实上，这些结论在 $M/M/1/SV$ 排队中也是成立的，因为连续时间情形可视为离散时间排队的极限. 在此由于篇幅限制，对连续时间排队的分析将在另一篇文章中展现.

在图 2 中，随着 R 的增大，门限端点值基本呈线性增长，只在某些小范围内保持不变. 当门限值增大时，进入概率增大；当门限值不变时，进入概率减少. 这是容易理解的：由于顾客完成一次服务的收入增多，更多的顾客愿意加入排队，所以门限增大的同时进入概率也增大了. 当门限持平不变时，虽然收入增多，但是却没有更多的顾客加入排队，到达顾客会产生对系统的负面猜测，模仿其他到达顾客的止步行为，故进入概率减少. 虽然进入概率起伏变化，但是社会收益受门限的影响较大，仍呈现出了线性增长趋势. 在图 3.a 和图 4.a 中，一方面，门限变化图象的某些部分 $k_L+1>k_U$, 即 $k_L=k_U$, 此时 $q_e(k_L+1)=0$, $q_e(k_U)$ 不存在并且 $SB(k_U)=0$; 另一方面，门限持平的区间较多，说明门限值对到达率 p 和休假率 θ 的敏感性低于完成服务的收入 R 的敏感性. 在图 3 中，当到达顾客增多时，若门限增大，则进入概率增大；若门限不变，则止步的顾客增多，故进入概率减少. 社会收益随着 p 的增大而先增后减，这是因为：门限较小时，系统不拥挤，顾客的逗留支出较少，社会收益不断增多；门限增大到一定程度时，系统变得拥挤，顾客的逗留支出变大，社会收益有所减少. 在图 4 中，当休假率 θ 增大时，到达顾客的平均等待休假时间减小，从而逗留损耗减少，故进入系统的门限增大，社会收益也随之增长；当 θ 增大到一定值时，平均等待休假时间的变化很小，门限值趋于平稳，此时社会收益只有微小增长.

5 结束语

本文基于单重休假 $Geo/Geo/1$ 排队，研究顾客的均衡止步策略，提供了一种寻找均衡策略的算法，并给出了在均衡止步策略下，系统的稳态分布和均衡社会收益. 首次将休假机制引入到了离散时间排队经济学模型中，为系统的最优化设计和运行控制提供了极大的灵活性. 系统的决策主体是顾客，突破了以往只注重服务机构单方面行为的局限，得到的均衡策略可以指导顾客采取优化的排队决策，减少排队损耗. 同时，研究结果可以为管理者制定合理的价格机制和优先权分配机制提供有利的理论参考，帮助管理者优化系统设计，最大化自身收益或社会收益.

参考文献

[1] Naor P. The regulation of queue size by levying tolls [J]. *Economica*, 1969, **37**: 15-24.
[2] Edelson N M, Hildebrand D K. Congestion tolls for Possion queuing processes [J]. *Econometrica*, 1975, **43**: 81-92.
[3] Burnetas A, Economou A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times [J]. *Queueing Systems*, 2007, **56**: 213-228.
[4] Economou A, Kanta S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs [J]. *Operations Research Letters*, 2008, **36**: 696-699.
[5] Hassin R, Haviv M. Equilibrium Threshold Strategies: The Case of Queues with Priorities [J]. *Operation Research*, 1997, **45**(6): 966-973.
[6] Sun W, Guo P F, Tian N S. Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times [J]. *CEJOR*, 2010, **18**: 241-268.
[7] Guo P F, Sun W, Wang Y L. Equilibrium and optimal strategies to join a queue with partial information on service times [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, **214**: 284-297.
[8] Hassin R, Haviv M. Equilibrium behavior in queueing systems: to Queue or not to Queue [M]. Dordrecht: Kluwer, 2003.
[9] 孙微. 基于博弈论的排对经济学模型及策略分析 [D]. 秦皇岛：燕山大学， 2010: 113-119.
[10] Wei C M, Tian N S, Xia Z Q, Wang X W. The queue Geom/G/1 with multiple adaptive vacation and server set-up time [J]. *Operations Research Transactions*, 2003, 4: 22-30.
[11] 马占友，刘辛，田乃硕. 空竭服务 Geom/G/1 休假模型 [J]. 运筹学学报, 2004, 3: 71-77.
[12] Elaydi S N. An Introduction to Difference Equations[M]. New York: Springer, 1999.