

多重休假 $Geo/Geo/1$ 排队的均衡混合门限策略*

马 琰^{1,3}, 李继红^{2,†}, 刘维奇^{1,2}

(1- 山西大学数学科学学院, 太原 030006; 2- 山西大学管理学院, 太原 030006;

3- 中南大学数学与统计学院, 长沙 410075)

摘 要: 本文基于多重休假 $Geo/Geo/1$ 离散时间排队, 研究顾客的均衡混合门限策略. 强调排队系统中的决策主体是顾客, 突破了以往只注重研究服务机构单方面行为的局限. 建立了“收入-支出”结构, 利用预期净收益函数, 量化顾客的决策意愿; 根据拟生灭过程理论, 对系统进行了稳态分析; 进而构造适当的函数, 给出了寻找均衡混合门限策略的具体方法, 并给予了证明; 最后通过数值实验讨论了均衡策略对系统各参数的敏感性. 研究结果为管理者探讨排队系统中的定价问题提供了理论参考.

关键词: 多重休假; 拟生灭链; 稳态分布; 预期净收益; 均衡混合门限策略

分类号: AMS(2000) 60K25; 90B22

中图分类号: O226

文献标识码: A

1 引言

休假排队泛指服务台在某些时候不能为顾客提供服务的排队模型, 暂时中断服务的时间称为休假. 由于在计算机网络, 通信系统, 生产管理等领域的重要应用, 这类排队系统受到了人们的普遍关注. 近二十年来, 休假排队得到了广泛而深入的研究, 详见 Doshi^[1] 综述与 Takagi^[2], 田乃硕^[3] 等学者的著作.

近来, 基于不同的排队模型, 研究顾客的去留决策行为成为一个新的热点. 以往的研究大多注重服务机构的行为, 服务快慢和服务质量都由服务机构来控制, 顾客只是被动的接受, 没有决策权. 但是, 在实际情况中, 顾客具有主动性, 他们可以根据掌握的信息, 以自身的利益为出发点, 自主决定是否加入排队. 所以, 从顾客的角度出发来研究排队中的策略问题, 能进一步完善对实际问题的模拟. 同时, 研究结果可以为服务机构如何有效地控制和管理其服务水平提供参考, 具有重要的现实意义.

在排队模型中加入顾客策略的思想, 是由 Naor^[4] 首先提出的, 他通过建立一个简单的“收入-支出”结构, 分析了 $M/M/1$ 排队的均衡顾客策略. Hassin 和 Haviv^[5] 编写的专著完善并系统归纳了这一领域的已有结果. 近年来, 文献 [6-9] 将启动时间、中断和维修时间等各种不同情况加入到排队模型中开展研究. 但是, 这些研究都是基于经典排队模型, 未曾涉及到休假服务机制. 本文首次把顾客的决策行为与休假排队模式集成在一起,

收稿日期: 2011-05-26. 作者简介: 马琰 (1985年12月生), 女, 博士. 研究方向: 排队论与时间序列分析.

*基金项目: 教育部人文社会科学研究项目 (10YJC630114; 07JA630027); 博士后研究项目 (92169).

†通讯作者: 李继红 E-mail: lijh1982@sxu.edu.cn

研究多重休假策略下部分可视 $Geo/Geo/1$ 排队的均衡混合策略. 所谓部分可视排队是指到达顾客只知道队长信息, 不知道服务员状态的排队系统.

本文安排如下: 第2节描述系统模型, 构造顾客的“收入-支出”结构, 写出转移概率矩阵; 第3节求解稳态分布, 进而引入适当的函数, 寻找均衡混合门限策略并证明之; 第4节进行数值实验, 分析系统各指标对均衡混合门限策略的影响; 最后, 第5节是本文的结束语.

2 模型描述与分析

本文中规定, 对任意实数 $x \in (0, 1)$, 记 $\bar{x} = 1 - x$.

为了方便研究均衡顾客策略, 模型描述如下:

1) 系统中只有一名服务员, 每次只能服务一位顾客. 当系统中没有顾客时, 服务员立即进行休假. 如果一次休假结束后, 系统中仍无顾客, 则服务员进行另一次独立同分布的休假; 否则, 服务员立即开始为顾客服务.

2) 顾客到达只能发生在 $t = n^-, n = 0, 1, 2, \dots$, 到达间隔独立同分布且服从参数为 p 的几何分布 ($0 < p < 1$); 服务的开始与结束均发生在 $t = n, n = 0, 1, 2, \dots$, 服务时间独立同分布且服从参数为 μ 的几何分布 ($0 < \mu < 1$); 休假的开始与结束均发生在 $t = n^-, n = 0, 1, 2, \dots$, 休假时间独立同分布且服从参数为 θ 的几何分布 ($0 < \theta < 1$). 到达间隔、服务时间、休假时间都是相互独立的, 且系统服从先到先服务规则. 为保证系统稳定, 令 $p < \mu$.

3) 设 L_n 表示系统在 $t = n^+$ 时的顾客数, 按上述约定, 在 $t = n^+$ 时完成服务离去的顾客不再计入 L_n . 记

$$J_n = \begin{cases} 0, & t = n^+ \text{ 时系统处于休假状态,} \\ 1, & t = n^+ \text{ 时系统处于忙期,} \end{cases}$$

则 $\{L_n, J_n\}$ 是一个拟生灭过程. 状态 $(k, 0)$, $k \geq 0$, 表示系统处于休假期且其中有 k 个顾客; 状态 $(k, 1)$, $k \geq 1$, 表示系统处于忙期且其中有 k 个顾客.

4) 设顾客的策略集为 S , 支付函数为 F , 令 $F(a, b)$ 表示当某顾客选择策略 a , 而其他顾客选择策略 b 时的支付函数. 若对任意的 $s \in S$, 存在 $s_e \in S$, 满足 $F(s_e, s_e) \geq F(s, s_e)$, 那么我们称 s_e 是一个(对称纳什)均衡策略.

5) 建立“收入-支出”结构, 量化顾客的决策意愿. 设顾客每单位逗留时间的支出为 C , 完成一次服务的收入为 R . 顾客是风险中性的, 并且做出决定后, 不再反悔. 令 Be 表示到达顾客的预期净收益, $\pi_{J|L}(0 | k)$ 表示到达时服务员处于休假状态的概率(已知系统中有 k 位顾客). 当系统为空时, 为保证到达顾客的预期净收益为正值, 我们假设

$$R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}. \quad (1)$$

否则, 预期净收益为负值, 将不会有顾客愿意加入排队系统.

若第 $k + 1$ 位顾客加入排队, 则他的平均逗留时间为

$$\frac{k + 1}{\mu} + \frac{\pi_{J|L}^-(0|k)}{\theta},$$

故预期净收益

$$Be = R - \frac{C(k + 1)}{\mu} - \frac{C\pi_{J|L}^-(0|k)}{\theta}. \tag{2}$$

当 $Be > 0$ 时, 顾客选择加入排队; 当 $Be = 0$ 时, 顾客对去留保持中立; 当 $Be < 0$ 时, 顾客选择止步 (不进入系统). 从而, 我们可以得到下面的定理.

定理 1 在部分可视 Geo/Geo/1 排队中, 顾客到达时系统中已有 k 位顾客, 则存在唯一的均衡 L_e 门限策略, 即若 $k \leq L_e$, 则顾客加入排队; 若 $k > L_e$, 则顾客止步.

注 1 (i) 因为 Be 是关于 k 的单调减函数, 所以门限 L_e 是唯一的.

(ii) 由均衡的定义易判断出: 当某顾客选择其它值做为门限时, 这样的策略是不均衡的.

(iii) 定理中所述的 L_e 门限策略是一个纯门限策略.

6) 通常, 寻找均衡纯门限策略是很自然的, 然而, 现实中不乏这样的情况: 当其他顾客选择 L_e 门限时, 某顾客的最优策略是门限 $L_e + 1$, 而非 L_e ; 当其他顾客选择 $L_e + 1$ 门限时, 某顾客的最优策略是门限 L_e , 而非 $L_e + 1$. 此时, 一个纯门限策略便无法达到均衡了.

鉴于此, 我们引入 $L_e + q$ 混合门限策略, 详见文献 [9], 它是介于 L_e 纯门限策略和 $L_e + 1$ 纯门限策略之间的一种策略. 即: 顾客到达时系统中有 k 位顾客, 若 $k \leq L_e - 1$, 则顾客加入排队; 若 $k = L_e$, 则顾客以概率 q 进入系统, 或者以概率 $1 - q$ 止步; 若 $k > L_e$, 则顾客止步. 这是一种更一般的门限策略, 纯策略是它的一种特殊情况 (取 $q = 0, 1$). 本文以下讨论: 顾客选择严格意义上的混合门限策略, 即 $0 < q < 1$. 我们的目标是寻找均衡的 $L_e + q$ 混合门限策略.

由上面的假设与分析, 我们画出 $\{L_n, J_n\}$ 的状态转移图, 如图 1, 并写出转移概率矩阵 \tilde{P} , 其中状态空间 $\Omega = \{(k, j) \mid j \leq k \leq L_e + 1, j = 0, 1\}$.

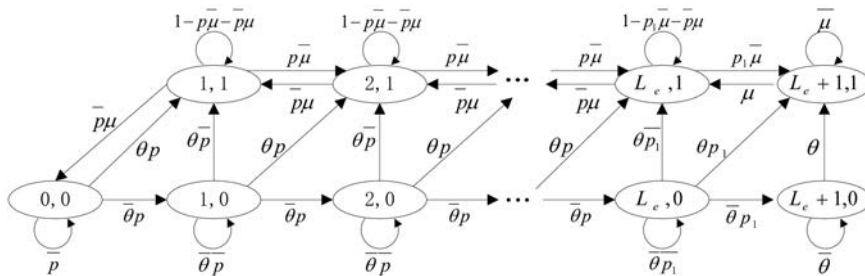


图 1: $L_e + q$ 混合门限策略状态转移图

其中

$$\alpha = \frac{p\bar{\mu}}{\bar{p}\mu}, \quad \beta = \frac{\bar{\theta}p}{1 - \bar{\theta}\bar{p}}.$$

证明 根据 QBD 过程的平稳条件 $\pi\tilde{P} = \pi$, 得到以下方程组

$$\pi_{00} = \bar{p}\pi_{00} + \bar{p}\mu\pi_{11}, \quad (3)$$

$$\pi_{k0} = \bar{\theta}p\pi_{k-1,0} + \bar{\theta}\bar{p}\pi_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots, L_e - 1, \quad (4)$$

$$\pi_{L_e,0} = \bar{\theta}p\pi_{L_e-1,0} + \bar{\theta}\bar{p}_1\pi_{L_e,0}, \quad (5)$$

$$\pi_{L_e+1,0} = \bar{\theta}p_1\pi_{L_e,0} + \bar{\theta}\pi_{L_e+1,0}, \quad (6)$$

$$\pi_{11} = \theta p\pi_{00} + \theta\bar{p}\pi_{10} + (1 - p\bar{\mu} - \bar{p}\mu)\pi_{11} + \bar{p}\mu\pi_{21}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \pi_{k1} &= \theta p\pi_{k-1,0} + p\bar{\mu}\pi_{k-1,1} + \theta\bar{p}\pi_{k0} \\ &\quad + (1 - p\bar{\mu} - \bar{p}\mu)\pi_{k1} + \bar{p}\mu\pi_{k+1,1}, \quad k = 2, 3, \dots, L_e - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\pi_{L_e,1} = \theta p\pi_{L_e-1,0} + p\bar{\mu}\pi_{L_e-1,1} + \theta\bar{p}_1\pi_{L_e,0} + (1 - p_1\bar{\mu} - \bar{p}\mu)\pi_{L_e,1} + \mu\pi_{L_e+1,1}, \quad (9)$$

$$\pi_{L_e+1,1} = \theta p_1\pi_{L_e,0} + p_1\bar{\mu}\pi_{L_e,1} + \theta\pi_{L_e+1,0} + \bar{\mu}\pi_{L_e+1,1}. \quad (10)$$

由 (4) 得 $\pi_{k0} = \beta^k\pi_{00}$, $k = 1, 2, \dots, L_e - 1$. 由 (5) 得

$$\pi_{L_e,0} = \frac{\bar{\theta}p}{1 - \bar{\theta}\bar{p}_1}\pi_{L_e-1,0}.$$

由 (6) 得

$$\pi_{L_e+1,0} = \frac{\bar{\theta}p_1}{\theta}\pi_{L_e,0}.$$

由 (8) 可知 $\{\pi_{k1} \mid k = 1, 2, \dots, L_e\}$ 是如下常系数非齐次线性差分方程的解

$$\begin{aligned} &\bar{p}\mu x_{k+1} - (p\bar{\mu} + \bar{p}\mu)x_k + p\bar{\mu}x_{k-1} \\ &= -\theta p\pi_{k-1,0} - \theta\bar{p}\pi_{k0} = -\frac{\theta}{\bar{\theta}}\beta^k\pi_{00}, \quad k = 2, 3, \dots, L_e - 1. \end{aligned}$$

通过计算可得

$$\pi_{k1} = \frac{\theta + \bar{\theta}p}{\mu - \theta - \bar{\theta}p}(\beta^k - \alpha^k)\pi_{00}, \quad k = 1, 2, \dots, L_e.$$

从而, 利用 (10) 可得

$$\pi_{L_e+1,1} = \left[\frac{p_1}{\mu} \left(\frac{1 - \bar{\theta}\bar{p}}{1 - \bar{\theta}\bar{p}_1} + \frac{\bar{\mu}(\theta + \bar{\theta}p)}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \right) \beta^{L_e} - \frac{p_1\bar{\mu}(\theta + \bar{\theta}p)}{\mu(\mu - \theta - \bar{\theta}p)} \alpha^{L_e} \right] \pi_{00}.$$

由正规化条件 $\pi e = 1$, 可计算出 π_{00} 的表达式.

3.2 寻找混合门限策略及均衡的证明

利用定理2的结果, 容易计算出

$$\begin{cases} \pi_{J|L}^-(0|k) = \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}p}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k\right)\right]^{-1}, & k = 0, 1, 2, \dots, L_e - 1, \\ \pi_{J|L}^-(0|L_e) = \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}pq}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{L_e}\right)\right]^{-1}, \\ \pi_{J|L}^-(0|L_e + 1) = \left[1 + \frac{\theta}{\mu\theta} + \frac{\bar{\mu}\theta}{\mu\theta} \frac{\theta + \bar{\theta}pq}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{L_e}\right)\right]^{-1}. \end{cases} \quad (11)$$

根据预期净收益函数 Be 的构造, 我们引入下列函数

$$g(k, y) = R - \frac{C(k+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}py}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k\right)\right]^{-1}, \quad y \in [0, 1], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$g_U(k) = g(k, 1) = R - \frac{C(k+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}p}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k\right)\right]^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$g_L(k) = g(k, 0) = R - \frac{C(k+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k\right)\right]^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

显然

$$g_U(0) = g_L(0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta} > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_U(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_L(k) = -\infty.$$

从而, 存在 k_U 使得

$$g_U(0), g_U(1), g_U(2), \dots, g_U(k_U) > 0, \quad g_U(k_U + 1) \leq 0. \quad (15)$$

因为对于每一个固定的 k , $g(k, y)$, 是关于 y 的增函数, 故 $g_L(k) \leq g_U(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. 特别地, $g_L(k_U + 1) \leq g_U(k_U + 1) \leq 0$. 又因为 $g_L(0) > 0$, $g_L(k_U + 1) \leq 0$, 故存在 $k_L \leq k_U$ 满足

$$g_L(k_L) > 0, \quad g_L(k_L + 1), \dots, g_L(k_U), g_L(k_U + 1) \leq 0. \quad (16)$$

当 $k_L = k_U$ 时, 存在唯一的均衡纯门限策略 $k_L + 1$; 当 $k_L < k_U$ 时, 得到下面的定理.

定理3 在多重休假中可视 $Geo/Geo/1$ 排队, $L_e + q_e$ 混合门限策略是均衡的, 其中

$$L_e = k_L + 1, \dots, k_U, \quad q_e = \frac{1}{\bar{\theta}p} \left[\frac{\mu - \theta - \bar{\theta}p}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{L_e}} \left(\frac{C}{\theta \left(R - \frac{C(L_e+1)}{\mu}\right)} - 1 \right) - \theta \right].$$

证明 对任意的 $L_e \in \{k_L + 1, \dots, k_U\}$, 可以验证 q_e 是 $g(L_e, y) = 0$ 的唯一根. 因为 $g(k, y)$ 是 y 的连续函数, 且 $g_L(L_e)g_U(L_e) = g(L_e, 0)g(L_e, 1) \leq 0$, 所以 q_e 是一个概率.

已知顾客到达时系统中有 k 位顾客:

1) 若 $k \leq L_e - 1$, 由 (2), (11), (13) 和 (15) 可得, 此顾客的预期净收益

$$B_e = R - \frac{C(k+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}p}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^k \right) \right]^{-1} = g_U(k) > 0,$$

从而, 顾客选择加入排队.

2) 若 $k = L_e$, 由 (2), (11) 和 (12) 可得, 此顾客的预期净收益

$$B_e = R - \frac{C(L_e + 1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta + \bar{\theta}p q_e}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{L_e} \right) \right]^{-1} = g(L_e, q_e) = 0,$$

从而, 顾客对加入排队还是止步是中立的, 而以概率 q_e 进入是最佳的.

3) 若 $k = L_e + 1$, 由 (2), (11), (14) 和 (16) 可得, 此顾客的预期净收益

$$\begin{aligned} B_e &= R - \frac{C(L_e + 2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu\bar{\theta}} + \frac{\bar{\mu}\theta}{\mu\bar{\theta}} \frac{\theta + \bar{\theta}p q_e}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{L_e} \right) \right]^{-1} \\ &\leq R - \frac{C(L_e + 2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu\bar{\theta}} + \frac{\bar{\mu}\theta}{\mu\bar{\theta}} \frac{\theta + \bar{\theta}p}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{L_e} \right) \right]^{-1} \\ &= R - \frac{C(L_e + 2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta\bar{p}}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{L_e + 1} \right) \right]^{-1} \\ &< R - \frac{C(L_e + 2)}{\mu} - \frac{C}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{\mu - \theta - \bar{\theta}p} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{L_e + 1} \right) \right]^{-1} = g_L(L_e + 1) \leq 0, \end{aligned}$$

从而, 顾客选择止步.

上面的证明过程表明, 当顾客选择混合门限策略 $s_e = L_e + q_e$ 时, 对任意的混合门限策略 $s \in S$, 都有 $F(s_e, s_e) \geq F(s, s_e)$, 所以定理所述的 $L_e + q_e$ 混合门限策略是均衡的.

4 数值实验

定理 3 给出了门限的范围和进入概率对应的表达式, 下面我们来分析它们对系统参数的敏感性. 假设顾客每单位逗留时间的支出 $C = 1$, 服务台的服务率 $\mu = 0.95 (\mu < 1)$. 图 2 到图 4 给出了门限 L_e 的端点 $k_L + 1$, k_U 和对应的进入概率 $q_e(k_L + 1)$, $q_e(k_U)$ 分别关于 p, θ, R 的变化情况.

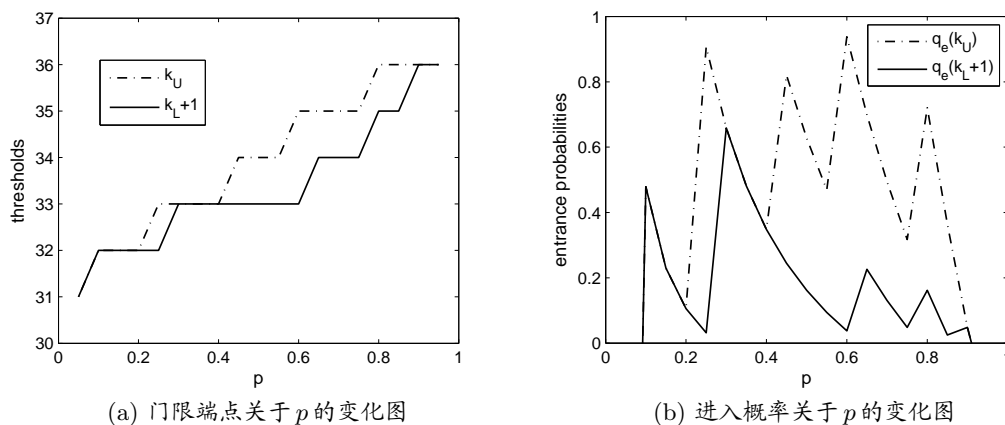


图 2: 参数 p 的影响 ($\theta = 0.15, R = 40, \mu = 0.95, C = 1$)

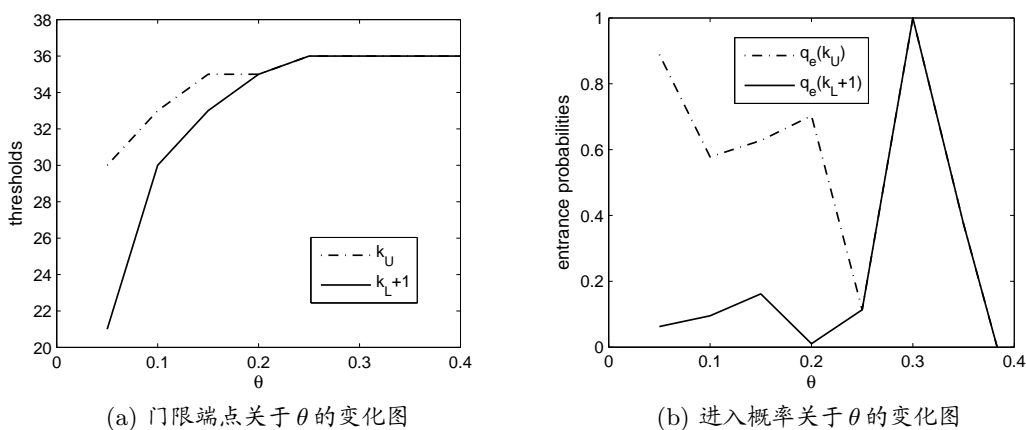


图 3: 参数 θ 的影响 ($p = 0.5, R = 40, \mu = 0.95, C = 1$)

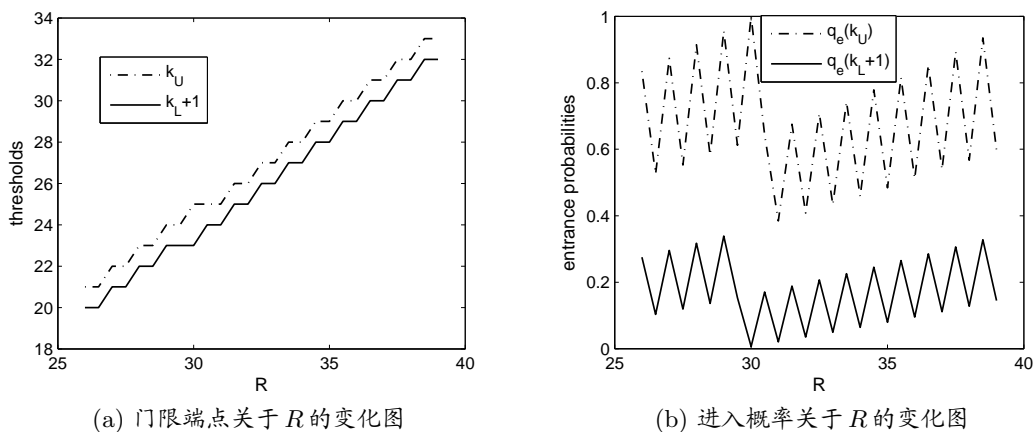


图 4: 参数 R 的影响 ($p = 0.5, \theta = 0.15, \mu = 0.95, C = 1$)

我们发现门限端点 $k_L + 1$, k_U 随着参数 p , θ , R 的增大而呈增长趋势, 当参数在一定范围内变化时, 门限保持不变, 特别地, 图 2(a) 和图 4(a) 中的门限端点值呈现出阶梯式增长. 另一方面, 进入概率 $q_e(k_L + 1)$, $q_e(k_U)$ 随着 p , θ , R 的增大而起伏变化; 当门限端点取拐点处的值时, 对应的进入概率取到极值. 在图 2 和图 4 中, 门限端点值阶梯式增长, 其对应的进入概率则规律地起伏变化. 具体来说, 若门限端点值不变, 则进入概率减少; 若门限端点值增大, 则进入概率增大. 事实上, 随着 p 的增大, 即到达的顾客增多, 若门限不变, 则止步的顾客增多, 故顾客进入系统的概率减少; 若门限增大, 则止步的顾客相对减少, 故顾客进入系统的概率增大. 随着 R 的增大, 即顾客完成一次服务的收入增多, 若门限不变, 也就是说, 虽然收入增多, 但是却并没有更多的顾客愿意加入排队, 这一情况会使到达顾客产生对系统的负面猜测, 更多地模仿其他顾客的止步行为, 故顾客进入系统的概率减少; 若门限增大, 此时, 在收入增多的诱惑下, 更多的顾客愿意加入排队, 故顾客进入系统的概率增大.

5 结束语

本文研究顾客的均衡混合门限策略, 突破了以往只注重研究服务机构单方面行为的局限, 完善了对实际情况的模拟, 同时, 得到的混合策略应用更加灵活、广泛. 基于“收入-支出”结构, 量化顾客的决策意愿; 通过对系统进行稳态分析, 构造适当的函数, 提供了寻找均衡混合门限策略的具体算法. 研究结果不仅为顾客决策提供了优化建议, 而且可以指导服务机构对系统做出调整, 更加有效地运行.

参考文献:

- [1] Doshi B. Queueing system with vacations—a survey[J]. Queueing Systems, 1986, 1(1): 29-66
- [2] Takagi H. Queueing Analysis: Discrete-Time Systems[M]. Amsterdam: North-Holland Elsevier, 1993
- [3] 田乃硕. 休假随机服务系统[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001
Tian N S. Stochastic Service Systems with Vacations[M]. Beijing: Peking University Press, 2001
- [4] Naor P. The regulation of queue size by levying tolls[J]. Economica, 1969, 37(1): 15-24
- [5] Hassin R, Haviv M. Equilibrium Behavior in Queueing Systems: to Queue or Not to Queue[M]. Dordrecht: Kluwer, 2003
- [6] Guo P, Zipkin P. Analysis and comparison of queues with different levels of delay information[J]. Management Science, 2007, 53(6): 962-970
- [7] Economou A, Kanta S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs[J]. Operations Research Letters, 2008, 36(6): 696-699
- [8] Sun W, Guo P F, Tian N S. Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times[J]. Central European Journal of Operations Research, 2010, 18(3): 241-268
- [9] Burnetas A, Economou A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times[J]. Queueing Systems, 2007, 56(3-4): 213-228

Equilibrium Mixed Threshold Strategies in the $Geo/Geo/1$ Queue with Multiple Vacations

MA Yan^{1,3}, LI Ji-hong^{2,†}, LIU Wei-qi^{1,2}

(1- College of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006;

2- College of Management, Shanxi University, Taiyuan 030006;

3- School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410075)

Abstract: This paper studies the equilibrium mixed threshold strategies of customers in the $Geo/Geo/1$ queue under multiple vacation policy. Customers decide by themselves whether to join or to balk. A “reward-cost” structure is built and the expected net benefit function is made to reflect the desire of customers for service. Based on the theory of QBD processes, the stationary system behavior is analyzed. By introducing several proper functions, the mixed threshold strategies are provided and proved to be equilibrium strategies. Finally, we present numerical experiments to demonstrate the sensitivity of the equilibrium mixed thresholds strategies with respect to the system parameters. The results provide useful reference information to managers on the pricing problem in queueing system.

Keywords: multiple vacations; quasi birth and death chain; steady-state distribution; expected net benefit; equilibrium mixed threshold strategy

Received: 26 May 2011. **Accepted:** 08 Nov 2011.

Foundation item: The Humanities and Social Science Fund in Ministry of Education in China (10YJC630114; 07JA630027); the Post-doctoral Research Project (92169).

†Corresponding author: J. Li. E-mail address: lijh1982@sxu.edu.cn