1995年第16卷第3期 华北工学院学报 Vol.16 No.3 1995
(总第51期) JOURNAL OF NORTH CHINA INSTITUTE OF TECHNOLOGY (Sum No.51)

Wishart 分布的矩量计算

张信东 潘晋孝

(山西大学，太原 030006) (华北工学院，太原 030051)

摘 要 本文给出了 Wishart 分布各阶矩的计算公式及其详细的推导过程.

关键词 Wishart 分布；矩；计算
分类号 O211.3

0 引 言

Wishart 分布在多元统计学中占有相当重要的位置，在计量经济、工业、生物等领域都有广泛的应用. 但现有文献中对该分布矩的计算讨论甚少. 这里，我们将给出它的各阶矩的计算公式.

首先给出 Wishart 分布的定义.

定义 设 $A=Z'Z$，其中 $Z=Z_{n\times m}\sim N\ (0, I_n\otimes\sum)$. $\sum>0$. 则称 A 服从自由度为 n，协方差为$\sum$的 Wishart 分布，记作 $A\sim W_m(N,\sum)$.

文献［1］中证明了若 $A\sim W_m(n,\sum)$，则 A 具有密度函数($n\geqslant m$).

$$\frac{\operatorname{etr}(-\frac{1}{2}\sum^{-1}A)\cdot(\det A)^{(n-m-1)/2}}{2^{mn/2}\Gamma_m(\frac{n}{2})\cdot(\det\sum)^{n/2}}\qquad A>0 \tag{1}$$

易证，当 n 不是整数时($n\geqslant m$)，(1)式还是一个概率密度函数. 由此可将 Wishart 分布的自由度推广到非整数. 即称具有形式为(1)式的概率密度的分布为 Wishart 分布，仍记 $A\sim W_m(n,\sum)$. 以下如无特别说明所提 Wishart 分布均为推广后的 Wishart 分布，我们将给出 n 为正整数时该分布各阶矩的计算公式，并对一阶、二阶矩的计算推广到 n 为非整数.

以下记 $A=(a_{ij})$，$\sum=(\sigma_{ik})$. 由 Wishart 分布的原始定义知，要研究 Wishart 分布的各阶矩，应首先搞清正态随机向量的各阶矩.

* 本稿于 1994 年 10 月 21 日收到.

1 多维正态随机变量高阶矩的计算

定理1 设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$维正态随机变量，其中$E\xi_i=0$，$E\xi_i\xi_j=b_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 则$m\leqslant n$时有

$$E(\xi_1\xi_2\cdots\xi_m)=\begin{cases}0 & m\text{ 为奇数}\\ \sum\limits_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_k,\beta_k} b_{\alpha_1\beta_1}b_{\alpha_2\beta_2}\cdots b_{\alpha_k\beta_k} & m\text{ 为偶数 } k=m/2\end{cases}$$

其中α_1，β_1，$\cdots$，α_k，β_k取1，2，$\cdots$，$2k$的所有全排列，且$\alpha_i<\beta_i$，$i=1$，2，$\cdots$，k.

证明 由文献[2]知$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$的特征函数为

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}t_it_z\}\triangleq\exp\{f(t_1\cdots,t_n)\}$$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)$对$t_1,\cdots,t_m$求m阶混合偏导

$$\frac{\partial^m\varphi}{\partial t_1\cdots\partial t_m}=e^f\sum_{i_1+\cdots+i_n=m}\ \sum_{11,12,\cdots,1i_1,21,\cdots mi_m}\ \prod_{p=1}^{n}\frac{\partial^{i_p}f}{\partial t_{p1}\cdots\partial t_{pi_p}} \tag{2}$$

其中$11,12,\cdots,1i_1$；$21,\cdots,2i_2\cdots m1,\cdots mi_m$取$1,2,\cdots,m$的所有全排列，且$p_1<p_2<\cdots<pi_p$；$p=1,2;\cdots,m$. 同时在(2)式中规定$i_p=0$时$\frac{\partial^{i_pf}}{\partial t_{p0}}=1$；$i_p=1$时$\frac{\partial^{i_pf}}{\partial t_{p1}}=\frac{\partial f}{\partial t_{p1}}$.

由于
$$f(t_1,\cdots,t_n)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}t_it_j$$

为二次型，所以有

$$e^f|_{t_1=\cdots=t_n=0}=e^0=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}|_{t_1=\cdots=t_n=0}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i\partial t_j}=-b_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial t_{j1}\cdots\partial t_{jk}}=0 \qquad k>2 \qquad j_1,\cdots,j_k=1,2,\cdots,n$$

从而(2)式中，当$t_1=\cdots=t_n=0$时，只有i_p中有k个为2，其余均为0时，该项才不为0. 于是当m为奇数且$t_1=\cdots=t_n=0$时(2)式的值必为0，当m为偶数，记$m=2k$时

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m\varphi}{\partial t_1\cdots\partial t_m}|_{t_1=\cdots=t_n=0}&=\sum_{\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_k,\beta_k}\frac{\partial^2 f}{\partial t_{\alpha_1}\partial t_{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^2 f}{\partial t_{\alpha_k}\partial t_{\beta_k}}\\&=(-1)^k\sum_{\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_k\beta_k}b_{\alpha_1\beta_1}b_{\alpha_2\beta_2}\cdots b_{\alpha_k\beta_k}\end{aligned} \tag{3}$$

其中α_1，β_1，$\cdots$，α_k，β_k取1，2，$\cdots$，$2k$的所有全排列，且$\alpha_i<\beta_i$，$i=1$，2，$\cdots$，k.

再由特征函数的性质(见[2])

$$E(\xi_1\cdots\xi_m)=i^{-m}\frac{\partial^m\varphi}{\partial t_1\cdots\partial t_m}|_{t_1=\cdots=t_n=0} \tag{4}$$

式中，i为虚数单位.

由(3),(4)式即得定理成立.

推论1 设$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$为n维正态随机变量，其中$E\xi_i=a_i$，$E\xi_i\xi_j=b_{ij}$，i，$j=1$，2，$\cdots$，

n，则 $m\leqslant n$ 时有

$$E[(\xi_1-a_1)\cdots(\xi_m-a_m)]=\begin{cases}0 & m\text{ 为奇数}\\ \sum\limits_{\alpha_1\cdots\beta_k} b_{\alpha_1\beta_1}\cdots b_{\alpha_k\beta_k} & m\text{ 为偶数}, k=m/2\end{cases}$$

这里 α_1，β_1，…，α_k，β_k 取 1，2，…，$2k$ 的所有全排列，且 $\alpha_i<\beta_i$，$i=1$，2，…，k.

推论 2　设 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 n 维正态随机变量，其中，$E\xi_i=a_i$，$E\xi_i\xi_j=b_{ij}$. $i,j=1,2,\cdots,n$. γ_1，γ_2，…，γ_m 为小于 n 的任意自然数. 则

$$E[(\xi_{\gamma_1}-a_{\gamma_1})\cdots(\xi_{\gamma_m}-a_{\gamma_m})]=\begin{cases}0 & m\text{ 为奇数}\\ \sum\limits_{\alpha_1\cdots\beta_k} b_{\alpha_1\beta_1}b_{\alpha_2\beta_2}\cdots b_{\alpha_k\beta_k} & m\text{ 为偶数 } k=m/2\end{cases}$$

这里 α_1，β_1，…，α_k，β_k 取 γ_1，γ_2，…，γ_m 的所有全排列，同时 α_i 与 $\beta_i(i=1,2,\cdots,k)$ 有如下关系：若 $\alpha_i=\gamma_{j1}$，$\beta_i=\gamma_{j2}$时，要求 $j_1<j_2$ · j_1，$j_2=1$，2，…，m.

特别当 $\gamma_1=\gamma_2=\cdots=\gamma_m=\gamma$ 时($m=2k$)

$$E(\xi_r-a_r)^m=\frac{m!}{(n-m)!2^{m/2}(\frac{m}{2})!}b_{rr}=\frac{(2k)!\sigma_r^2}{(n-2k)!2^k k!}$$

推论 1，推论 2 均可由定理 1 直接推得.

2　Wishart 分布一阶、二阶矩的计算

定理 2　若 $A\sim W_m(n,\sum)$，则 $EA=n\sum$.

证明　当 n 是正整数时，令 $A=Z'Z$，$Z\sim N(0,I_n\otimes\sum)$，对 Z 进行分块 $Z'=(z_1,\cdots,z_n)$，则 z_1，…，z_n 独立同分布，且服从 $N(0,\sum)$. 记

$$z_i=\begin{pmatrix}z_{1i}\\ z_{2i}\\ \vdots\\ z_{mi}\end{pmatrix}\tag{5}$$

于是有　$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}z_{ik}z_{jk}$$

从而　$$Ea_{ij}=\sum_{k=1}^{m}Ez_{ik}z_{jk}=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ij}=n\sigma_{ij}$$

故　$$EA=n\sum$$

对一般的 $n(n\geqslant m)$.

A 的特征函数为(见[3])

$$\Phi(\Theta)=E[\exp(i\sum_{j\leqslant k}^{m}a_{jk}\theta_{jk})]=\det(I_m-i\Gamma\sum)^{-n/2}\tag{6}$$

其中 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n\}$，$\theta_i=(\theta_{1i},\theta_{2i},\cdots,\theta_{mi})'$，$\Gamma=(\gamma_{ij})=(1+\delta_{ij})\theta_{ij}$.

记 $R=(r_{ij})=I_m-i\Gamma\sum$，$R_{ij}$表示 r_{ij}的代数余子式. 由矩阵微商公式

$$\frac{\partial(\det R)}{\partial R}=(\det R)(R^{-1})'\tag{7}$$

得
$$\frac{\partial(\det R)}{\partial \tau_{jk}} = R_{jk} \quad 1 \leqslant j, k \leqslant m \tag{8}$$

于是，当 $j \leqslant k$ 时，由(7)，(8)式及复合函数偏导数定理即得
$$Ea_{jk} = \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \theta_{jk}}\Big|_{\Theta=0} = \frac{n}{2}\det R^{-n/2-1}\sum_{q}(R_{jq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{jq})\Big|_{\Gamma=0} \tag{9}$$

由于当 $\Gamma=0$ 时
$$R = I_m - i\Gamma\sum = I_m \tag{10}$$
$$R_{jj} = 1 \quad R_{jk} = 0 \quad j \neq k \quad 1 \leqslant j, k \leqslant m \tag{11}$$

由(9)，(10)，(11)式即得
$$Ea_{jk} = n\sigma_{jk}$$

从而 $EA = n\sum$. 命题成立.

定理 3 设 $A \sim W_m(n, \sum)$，则

(i)
$$\text{cov}(a_{ij}, a_{kl}) = n(\sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk}) \tag{12}$$

(ii)
$$D(\text{rec}A) = n(I_{m^2} + Q)(\sum \otimes \sum) \tag{13}$$

其中 $Q = \sum_{i,j=1}^{m}(H_{ij} \otimes H'_{ij})$，$H_{ij}$ 为 $m \times m$ 阶阵，其第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为 0.

证明 (i) 当 n 为正整数时，由(5)式知
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} z_{jk}$$

于是
$$\text{cov}(a_{ij}, a_{kl}) = Ea_{ij}a_{kl} - Ea_{ij}Ea_{kl} = E\Big(\sum_{r=1}^{n} z_{ir}z_{jr}\sum_{s=1}^{n} z_{ks}z_{ls}\Big) - n\sigma_{ij}n\sigma_{kl}$$
$$= \sum_{r=1}^{n} E(z_{ir}z_{jr}z_{kr}z_{lr}) - n\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{14}$$

由定理 1 的推论 2 得
$$E(z_{ir}z_{jr}z_{kr}z_{lr}) = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk} \tag{15}$$

由(14)，(15)式即得(12)式成立.

对一般的实数 $n(n > m-1)$，仍利用特征函数的方法. 由定理 2 的(9)式知
$$\frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \theta_{kl}} = \frac{n}{2} i \det R^{-n/2-1}\sum_{q=1}^{m}(R_{lq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{lq}) \tag{16}$$
$$\frac{\partial(\det R)}{\partial \theta_{kl}} = -i\sum_{q=1}^{m}(R_{lq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{lq}) \tag{17}$$

于是
$$\frac{\partial^2 \Phi(\Theta)}{\partial \theta_{rs}\partial \theta_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{rs}}\Big(\frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial \theta_{kl}}\Big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial \theta_{rs}}\Big(\frac{ni}{2}\det R^{-n/2-1}\sum_{q=1}^{m}(R_{lq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{lq})\Big)$$
$$= \frac{ni}{2}\Big[\Big(-\frac{n}{2} - 1\Big)\det R^{-n/2-2}(-i)\sum_{q=1}^{m}(R_{rq}\sigma_{sq} + R_{sq}\sigma_{rq})\sum_{q=1}^{m}(R_{lq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{lq})$$
$$+ \det R^{-n/2-1}\sum_{q=1}^{m}\frac{\partial}{\partial \theta_{rs}}(R_{lq}\sigma_{kq} + R_{kq}\sigma_{lq})\Big] \tag{18}$$

而
$$\frac{\partial R_{lq}}{\partial \theta_{rs}} = \sum_{i \leqslant j}\frac{\partial R_{lq}}{\partial \gamma_{ij}}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \theta_{rs}} = (1 + \delta_{rs})\frac{\partial R_{lq}}{\partial \gamma_{rs}} = -i\sum_{j=1}^{m}\Big(\sigma_{sj}\frac{\partial R_{lq}}{\partial \tau_{rj}} + \sigma_{rj}\frac{\partial R_{lq}}{\partial \tau_{sj}}\Big) \tag{19}$$

记 $R^{-1}=(J_{ij})$. 由于 $\det R\cdot R^{-1}=(R_{ji})$,所以

$$\frac{\partial R_{ji}}{\partial r_{pq}}=\frac{\partial(\det R J_{ij})}{\partial r_{pq}}=\frac{\partial(\det R)}{\partial r_{pq}}J_{ij}+\det\frac{\partial J_{ij}}{\partial r_{pq}}$$

$$=R_{pq}J_{ij}+\det R\frac{\partial J_{ij}}{\partial r_{pq}} \tag{20}$$

由矩阵微商公式知

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial r_{pq}}=-R^{-1}e_p e_q' R^{-1}$$

其中 $$e_p'=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{p-1个},1,0,\cdots,0)$$

因此 $$\frac{\partial J_{ij}}{\partial r_{pq}}=-e_i' R^{-1}e_p e_q' R^{-1}e_j=-J_{ip}J_{qj} \tag{21}$$

将(21)式代入(20)式得

$$\frac{\partial R_{ji}}{\partial r_{pq}}=R_{pq}J_{ij}+\det R(-J_{ip}J_{qj}) \tag{22}$$

再将(22)式代入(19)式得

$$\frac{\partial R_{lq}}{\partial\theta_{rs}}=-i\sum_{j=1}^{m}[\sigma_{sj}(R_{rj}J_{ql}+\det R(-J_{qr}J_{jl}))$$

$$+\sigma_{rj}(R_{sj}J_{ql}+\det R(-J_{qs}J_{jl}))] \tag{23}$$

将以上所得结果(23)式代入(18)式,同时令 $\Theta=0$ 并化简即得

$$\frac{\partial^2\Phi(\Theta)}{\partial\theta_{rs}\partial\theta_{kl}}\Big|_{\Theta=0}=-n^2\sigma_{rs}\sigma_{kl}-n(\sigma_{kr}\sigma_{ls}+\sigma_{ks}\sigma_{lr}) \tag{24}$$

由特征函数的性质 $$E(a_{kl}a_{rs})=\frac{1}{i^2}\frac{\partial^2\Phi(\Theta)}{\partial\theta_{rs}\partial\theta_{kl}}\Big|_{\Theta=0} \tag{25}$$

于是由(24)式,(25)式及定理 2 可得

$$\operatorname{cov}(a_{kl},a_{rs})=E(a_{kl}a_{rs})-Ea_{kl}Ea_{rs}=n^2\sigma_{rs}\sigma_{kl}+n(\sigma_{kr}\sigma_{ls}+\sigma_{ks}\sigma_{lr})-na_{kl}\cdot n\sigma_{rs}$$

$$=n(\sigma_{kr}\sigma_{ls}+\sigma_{ks}\sigma_{lr})$$

则(12)式成立.

(ii) rec(A)的第 r,s 个元素可以分别表示为

$$\bar{a}_r=a_{r_1,r_0}\qquad r=(r_0-1)m+(r_1-1)\qquad 1\leqslant r_0,\ r_1\leqslant m$$

$$\bar{a}_s=a_{s_1,s_0}\qquad s=(s_0-1)m+(s_1-1)\qquad 1\leqslant s_0,\ s_1\leqslant m$$

从而有 $D(\mathrm{rec}A)$的第(r,s)个元素是

$$\operatorname{cov}(\bar{a}_r,\bar{a}_s)=\operatorname{cov}(a_{r_1r_0},\ a_{s_1,s_0})=n(\sigma_{r_1,s_1}\sigma_{r0,s_0}+\sigma_{r_1,s_0}\sigma_{r_0,s_1}) \tag{26}$$

又 $$I_{m^2}+Q=\begin{bmatrix} I_m+H_{11} & H_{21} & \cdots & H_{m1}\\ H_{12} & I_m+H_{22} & \cdots & H_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ H_{1m} & H_{2m} & \cdots & I_m+H_{mm}\end{bmatrix}$$

所以 $n(I_{m^2}+Q)(\sum\otimes\sum)$的第 r 行第 s 列元素为

$$n\sum_{p=1}^{m^2}(I_{m^2}+Q)_{rp}(\sum\otimes\sum)_{ps}$$

$$\xlongequal{p=(p_0-1)m+p_1-1} n\sum_{p_0=1}^{m}(H_{p_1,r_1}+H_{p_0,r_0})_{r_1p_1}(\sigma_{p_0s_0}\sigma_{p_1s_1})$$

$$=n\sigma_{r_0,s_0}\sigma_{r_1,s_1}+n\sigma_{r_1,s_0}\sigma_{r_0,s_1} \tag{27}$$

比较(26)与(27)式可得(13)式成立.

3 Wishart 分布高阶矩的计算

为了计算 Wishart 分布的高阶矩，我们先引入如下引理.

引理 1 设 $A\sim W_m(n,\sum)$，$rk(M_{k\times m})=k$，则

$$MAM'\sim W_k(n,M\sum M')$$

即 Wishart 分布族在此种线性变换下是封闭的.

证明 MAM'的特征函数为

$$E[\mathrm{etr}(\frac{i}{2}MAM'\Gamma)=E[\mathrm{etr}(\frac{i}{2}AM'\Gamma M)]=\det(I_m-iM'\Gamma M\sum)^{-n/2}$$

$$=\det[I_k-i\Gamma M\sum M')^{-n/2}$$

这正是$W_k(n,M\sum M')$的特征函数. 故命题成立.

引理 2 设 $A_{m\times m}>0$，则存在唯一的具有正对角元的上三角阵T，使得$A=T'T$.

证明参见文献[1](定理 $A9.7$，$P592$).

引理 3 $A\sim W_m(n,I_m)$，$n\geqslant m$，且n是正整数，令$A=T'T$. T 为引理2中所限制的，则T 的元素 $t_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant m)$相互独立，且$t_{ii}\sim x^2_{n-i+1}$，$i=1,2,\cdots,m$，$t_{ij}\sim N(0,1)$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$.

证明 由文献[1]知A的概率密度为

$$f(A)=\frac{\mathrm{etr}(-\frac{1}{2}A)(\det A)^{(n-m-1)/2}}{2^{mn/2}\Gamma_m(\frac{1}{2}n)}(\mathrm{d}A) \tag{28}$$

因为 $A=T'T$，故

$$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}(T'T)=\sum_{i\leqslant j}t_{ij}^2$$

$$\det A=\det(T'T)=\prod_{i=1}^{n}t_{ii}^2$$

$$(\mathrm{d}A)=2^m\prod_{i=1}^{m}t_{ii}^{m+1-i}\bigwedge_{i\leqslant j}\mathrm{d}t_{ij}$$

同时注意到 Γ 函数的性质

$$\Gamma_m(\frac{1}{2}n)=\prod^{m(m-1)/4}\prod_{i=1}^{m}\Gamma(\frac{1}{2}(n-i+1)) \tag{29}$$

从而由(28)式可得$t_{ij}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant m)$的联合概率分布密度为

$$\prod_{i<j}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t_{ij}^2)\mathrm{d}t_{ij}]\prod_{i=1}^{n}[\frac{\exp(-\frac{1}{2}t_{ii}^2)(t_{ii})^{(n-i+1)/2}}{2^{(n-i+1)/2}\Gamma(\frac{1}{2}(n-i+1))}\mathrm{d}t_{ii}^2]$$

这正是T 的元素的边缘概率分布密度的乘积，并且各元素的分布同引理所述相同.

引理 4　设 $A \sim W_m(n,\Sigma)$，$n \geqslant m$ 且 n 为正整数，则

$$\frac{\det A}{\det \Sigma} \text{ 与 } \prod_{i=1}^{m} \chi^2_{n-i+1} \text{ 同分布}$$

其中，$\chi^2_{n-i+1}(i=1, 2, \cdots, m)$是相互独立的 χ^2 变量.

证明　$A \sim W_m(n,\Sigma)$，由引理 1 可知

$$B = \Sigma^{-1/2} A \Sigma^{1/2} \sim W_m(n, I_m)$$

又由引理 2 知 B 可分解为

$$B = T'T$$

从而

$$\det B = \det(T'T) = \prod_{i=1}^{m} t_{ii}^2 \tag{30}$$

又由引理 3 知

$$t_{ii} \sim \chi^2_{n-i+1} \tag{31}$$

而

$$\det B = \frac{\det A}{\det \Sigma} \tag{32}$$

所以由(30)～(32)式可得

$$\frac{\det A}{\det \Sigma} \text{ 与 } \prod_{i=1}^{m} \chi_{n-i+1} \text{ 同分布}$$

由以上引理我们可证明如下 Wishart 分布高阶矩的计算公式.

定理 4　若 $A \sim W_m(n,\Sigma)$，$n \geqslant m$，且 n 为正整数，则

$$E(\det A)^r = (\det \Sigma)^r 2^{mr} \frac{\Gamma_m(\frac{1}{2}n + r)}{\Gamma_m(\frac{1}{2}n)}$$

证明　由引理 3，(29)式及公式

$$E(\chi_k^2)^r = \frac{2^r \Gamma(\frac{1}{2}k + r)}{\Gamma(\frac{1}{2}k)}$$

可得

$$E(\det A)^r = (\det \Sigma)^r E(\prod_{i=1}^{m} (\chi^2_{n-i+1})^r) = (\det \Sigma)^r \prod_{i=1}^{m} E(\chi^2_{n-i+1})^r$$

$$= (\det \Sigma)^r 2^{mr} \frac{\Gamma_m(\frac{1}{2}n + r)}{\Gamma_m(\frac{1}{2}n)}$$

故命题成立.

这样，我们便得到计算 Wishart 分布各阶矩的公式，这些结论也可推广到求广义方差的各阶矩.

参 考 文 献

1 Bobb J M. Aspects of Multivariate Statistical Theory. New York: John Wiley, 1982
2 复旦大学. 概率论. 北京: 高等教育出版社, 1979
3 方开泰. 实用多元统计分析. 上海: 华东师范大学出版社, 1981

CALCULATION OF THE SIZE OF MOMENT FOR WISHART DISTRIBUTION

Zhang Xindong
(Shanxi University, Taiyuan 030006)

Pan Jinxiao
(North China Institute of Technology, Taiyuan 030051)

Abstract This paper gives the calculation formula for Wishart distributing in different classes of moment and its detail proof.

Key words Wishart distribution; moments; calculation