2011 年 第32 卷 第1 期 中北大学学报(自然科学版) Vol. 32 No. 1 2011
(总第135 期) JOURNAL OF NORTH UNIVERSITY OF CHINA (NATURAL SCIENCE EDITION) (Sum No. 135)

文章编号: 1673-3193(2011)01-0099-05

$Geo/G/1$ 重试排队队长的尾渐近*

王颖俐[1], 李继红[2], 刘维奇[1,2]

(1. 山西大学 数学科学学院, 山西 太原 030006; 2. 山西大学 管理科学与工程研究所, 山西 太原 030006)

摘 要: 利用随机分解法研究离散时间 $Geo/G/1$ 重试排队队长的尾行为. 通过对服务时间具有有限指数阶矩的离散时间 $Geo/G/1$ 重试排队进行分析, 利用稳态队长的几何尾渐近结果, 得到该排队系统稳态队长尾分布与其相应的标准排队系统稳态队长尾分布的关系; 再基于离散时间排队与连续时间排队的近似关系, 进一步将结果应用到连续时间 $M/G/1$ 重试排队.

关键词: 重试排队; 尾渐近; 随机分解; 几何分布

中图分类号: O226 **文献标识码**: A **doi**: 10.3969/j.issn.1673-3193.2011.01.029

Tail Asymptotics for the Queue Length in a $Geo/G/1$ Retrial Queue

WANG Ying-li[1], LI Ji-hong[2], LIU Wei-qi[1,2]

(1. School of Mathematical Science, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
2. Institute of Management Science and Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract: The tail behavior of the stationary queue length of a discrete time $Geo/G/1$ retrial queue was studied by using stochastic decomposition. With the service time featuring a finite exponential moment, the correlation between the stationary queue length tail distribution of a $Geo/G/1$ retrial queue and the stationary queue length tail distribution in the corresponding standard $Geo/G/1$ queue was obtained by using the geometry tail asymptotic solution of the steady-state queue. Based on the approximate relation of the stationary queue length between discrete-time and continuous-time, the results can also be applied to continuous-time counterpart.

Key words: retrial queue; tail asymptotics; stochastic decomposition; geometric distribution

0 引 言

从 20 世纪初 Erlang 开创性地对通讯流研究至今, 经典的排队理论已被诸多数学家充分地发展和研究, 并建立了相当完善的理论研究成果, 参见文章 Gross and Harris(1985)[1]. 而重试排队, 是在过去二三十年里才引起了广泛的关注. 此类排队具有以下特性: 如果系统空闲, 就立即接受服务; 如果系统繁忙, 则进入等待轨道, 经过一段随机时间后重复发出接受服务的请求. 重试排队的这个服务特性在计算机和通信网络中起到特殊作用.

在当代计算机产业和宽带综合业务数字网络 (B-ISDN) 中, 语音、数据、图像等各种业务都将通过数

* 收稿日期: 2010-06-03
基金项目: 教育部人文社会科学研究项目(07JA630027, 06JA630035); 山西省高校人文社科重点研究基地项目(20083006)
作者简介: 王颖俐(1987-), 女, 硕士生. 主要从事时间序列分析及排队论研究.

字化分割成固定长度信元或包，进行统一的处理和传输 一个业务量的大小，用它所包含信元的个数来度量；一个需求占用的服务时间，是单位信元处理时间的整倍 计算机系统和B ISDN 中的大量操作环节和运行过程，更自然地表现出了离散时间现象的本质特征 计算机科学和信息技术的发展，激发了人们对离散时间系统的关注和探索，离散时间排队研究正是在这种背景下产生和发展起来的

Meisling (1958)[2]的论文是离散时间排队分析的起点 与经典的连续时间排队不同，一个离散时间排队模型的基本要素(到达间隔、服务时间等)都是非负整值随机变量，系统运行过程中的各种事件(顾客到达、服务的开始或结束等)都只发生在整点时刻 离散时间排队更适合于计算机系统建模和性能分析，引起了大批排队论和通信工程专家的广泛关注，并迅速产生了大量的理论分析及实际应用成果 Hunter (1983)[3]以及田乃硕(2008)[4]都对离散时间排队的早期成果作出了总结 Takagi 的著作 Queueing Analysis (1993)[5]从为计算机系统性能分析提供数学工具的角度出发，对各种 $Geo/G/1$ 系统给出了完整的分析

本文研究离散时间 $Geo/G/1$ 重试排队 在该系统中，假设顾客到达、重试、离开都发生在整点时刻，顾客到达遵从伯努利过程 顾客到达系统时，如果服务器空闲，则顾客立即接受服务，且在服务完后离开系统；反之，如果服务器繁忙，则顾客进入重试轨道 如果重试轨道中的一位顾客重新要求服务时，服务器空闲，则立即接受服务，且服务完后离开系统 相反，如果服务器繁忙，该顾客立即又返回重试轨道，并且重复重试过程 对于该模型的研究，学者们也做了大量的工作，如 Kim (2009)[6]以及 Yang and Li(1995)[7]都对该系统的稳态队长进行了研究，但都未能建立重试机制的排队与无重试机制的排队队长之间的关系，即考虑两者的尾渐近性，这样讨论重试机制情形更便捷

基于以上考虑，本文将研究离散时间 $Geo/G/1$ 重试排队稳态队长的尾渐近，应用重试排队中的随机结果，在假设服务时间分布具有有限指数阶矩的条件下，建立了 $Geo/G/1$ 重试排队稳态队长尾分布与其相应的标准 $Geo/G/1$ 排队稳态队长的尾分布的关系，并进一步应用到连续时间 $M/G/1$ 重试排队的情形

1 模型描述

考虑离散时间 $Geo/G/1$ 重试排队系统 假设顾客到达、重试、离开都发生在时隙(将时间轴分成固定长度的区段称为时隙)边界处，并且它们可能同时发生 由于数学的严密性，假设离开发生在时隙边界之前的那一瞬间，到达和重试则发生在时隙边界之后的那一瞬间

顾客到达遵从参数为 λ 的伯努利过程，其中：λ 表示在每个时间点上到达一个顾客的概率为 λ. 各个顾客的服务时间 B 是独立同分布的，它的概率母函数为 β，即

$$\beta(z) \equiv E[z^B],\ |z| < \gamma$$

其中：$\gamma \equiv \sup\{z > 0:\ E[z^B] < \infty\}$. 为了排除小概率事件，假设 $P(B > 1) > 0$. 用记号 $\beta_1(z) \equiv E[z^{B-1}]$，$|z| < \gamma$，表明 $B \geq 1$ 的概率为 1，且 $\beta(z) = z\beta_1(z)$，$|z| < \gamma$

如果顾客到达系统时服务器空闲，则顾客立即接受服务，且在服务完后离开系统；反之，如果服务器繁忙，则顾客进入重试轨道 如果重试轨道中的一位顾客重新要求服务时，服务器空闲，则立即接受服务，且服务完后离开系统；相反，如果服务器繁忙，该顾客立即又返回重试轨道，并且重复重试过程 每位重试顾客的重试时间(在两个相邻的重试时间段)是独立同分布的，服从参数为 $1-r$ 的几何分布，其中：$r = P$ (一个返回顾客在某个时隙处没有重试). 如果服务器空闲时，同时有两个或者更多的顾客(新到达或者重试的顾客)进入系统，则系统随机地选择一个顾客接受服务，其余顾客进入重试轨道

假设到达过程、服务时间、重试过程都是独立的 为了排除小概率事件，假设 $0 < \lambda < 1$, $0 < r < 1$.

假设存在 σ，使得

$$\beta(1-\lambda+\lambda\sigma) = \sigma,\ 1 < \sigma < 1 + \frac{\gamma-1}{\lambda}. \tag{1}$$

式 (1) 说明 $\gamma > 1$，这意味着服务时间分布具有有限指数阶矩；式 (1) 也说明服务强度 $\rho \equiv \lambda E[B]$ 严格地

小于 1，这意味着系统处于稳定状态

下面的引理给出了 L_μ 和 L_∞ 之间的关系:

引理 1　随机分解[8].

$Geo/G/1$ 重试排队系统中的队长 N_μ 可以分解为两个随机变量的和，一个变量为标准 $Geo/G/1$ 排队的队长 N_∞，另一个变量为服务台空闲条件下轨道中的顾客总数 R_μ，即

$$N_\mu = N_\infty + R_\mu \tag{2}$$

2　稳态队长的几何尾渐近

对于稳态 $Geo/G/1$ 重试排队，作以下定义

$$N = \text{轨道中顾客总数},$$

$$C = \begin{cases} 0 & (\text{空闲}), \\ 1 & (\text{繁忙}). \end{cases}$$

引理 2[6]　如果式 (1) 成立，当 $n \to \infty$ 时，有

$$P(C = 0, N = n) \sim c_0 \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n, \tag{3}$$

$$P(C = 1, N = n) \sim c_1 \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n. \tag{4}$$

其中:

$$c_0 = \frac{\lambda(1-\lambda)(\sigma-1)(1-\rho)}{(1-\lambda+\lambda\sigma)(\lambda\beta'(1-\lambda+\lambda\sigma)-1)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k\sigma)}{\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k)}, \tag{5}$$

$$c_1 = \frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma} c_0.$$

且

$$G(z) = \begin{cases} (1-\lambda) \cdot \dfrac{\beta_1(1-\lambda+\lambda z)-z}{\beta(1-\lambda+\lambda z)-z} & (|z| < \sigma, z \neq 1), \\ (1-\lambda) \cdot \dfrac{1+\lambda-\rho}{1-\rho} & (z = 1). \end{cases}$$

标注 1　对于 $|z| \leq 1$ 的每个 z，$\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z)$ 收敛于一个非零复合数　由于对 $0 < z < \sigma$ 有 $G(z) > 0$，所以式 (5) 中无限连乘积 $\prod_{k=1}^{\infty} G(r^k z)$ 收敛于正实数

定理 1　如果式 (1) 成立，有

$$P(N_\infty > l) \sim P(N_\mu > l).$$

证明

$$P(N_\mu = n) = c_0 \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n + c_1 \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1},$$

其中: $c_1 = c_0 \cdot \dfrac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma}$

$$P(N_\infty = n) = \frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma}(1-\rho)\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1} + o\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n\right),$$

$$P(N_\infty = 0) = 1-\rho,$$

$$P(R_\mu = n) = c_0 \cdot \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n + o\left(\left(\frac{r}{\sigma}\right)^n\right),$$

$$P(N_\infty > l) = \frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma} \cdot \sum_{i=l}^{\infty}(1-\rho) \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^i + o\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right)^l\right) =$$

$$\frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma}(1-\rho)\frac{(\frac{1}{\sigma})^l}{1-\frac{1}{\sigma}}+o((\frac{1}{\sigma})^l),$$

$$P(R_\mu>l)=c_0\sum_{i=l+1}^{\infty}(\frac{r}{\sigma})^i+o((\frac{r}{\sigma})^l)=c_0\frac{(\frac{r}{\sigma})^{l+1}}{1-\frac{r}{\sigma}}+o((\frac{r}{\sigma})^l),$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{P(R_\mu>l)}{P(N_\infty>l)}=\lim_{l\to\infty}\frac{c_0\frac{(\frac{r}{\sigma})^{l+1}}{1-\frac{r}{\sigma}}}{\frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma}(1-\rho)\frac{(\frac{1}{\sigma})^l}{1-\frac{1}{\sigma}}}=k\lim_{l\to\infty}\frac{r^{l+1}}{\sigma}.$$

其中: $k=\dfrac{c_0}{\frac{1-\lambda+\lambda\sigma}{\lambda(1-\lambda)\sigma}(1-\rho)}\dfrac{\sigma-1}{\sigma-r}$.

又由于 $0<r<1$, $1<\sigma$, 得

$$\lim_{l\to\infty}\frac{P(R_\mu>l)}{P(N_\infty>l)}=0.$$

3 相应连续时间排队的队长

在前面几节中, 没有确定时隙的长度, 仅仅只是把它看作时间单元. 如果假设每个时隙长为一个固定值 Δ, 当取 $\Delta\to0$ 时, 可以得到离散时间系统和其相对应的连续时间系统的近似关系.

考虑连续时间 $M/G/1$ 重试排队(可详见文献[9]). 假设顾客到达遵从强度为 $\tilde\lambda$ 的泊松过程, 重试顾客的重试时间是服从参数为 θ 的独立同分布指数随机变量, 各个顾客的服务时间 $\tilde B$ 是独立同分布的, 它的 Laplace-Stieltjes 变换为 $\tilde\beta(s)$, 即 $\tilde\beta(s)=E[e^{-s\tilde B}]$, 且其均值为 $\frac{1}{\mu}$. 如果假设时隙间隔等长且为 Δ, 可以由离散时间系统近似到连续时间

$$\lambda=\tilde\lambda\Delta,\ r=1-\theta\Delta,\ q_v=\tilde B(v\Delta)-\tilde B(v\Delta-\Delta),\ v=1,2,\cdots.$$

式中: q_v 为离散时间顾客的服务时间分布, 即 $q_v=P$(服务时间$=v$). 此时, 由于 Δ 充分小, 使得 $\tilde\lambda$, r 都是概率. 令 $\Delta\to0$, 就得到离散时间排队队长与连续时间排队队长的近似关系.

由 Yang and Li[7] 中定理 5 知, 如果 $\tilde\lambda<\mu$, 有

$$\lim_{\Delta\to0}Q(z)=\frac{(1-\tilde\lambda/\mu)(1-z)\tilde\beta(\tilde\lambda-\tilde\lambda z)}{\tilde\beta(\tilde\lambda-\tilde\lambda z)-z}\varphi(z),\tag{6}$$

其中:

$$\varphi(z)=\exp\{-\frac{\tilde\lambda}{\theta}\int\frac{1-\tilde\beta(\tilde\lambda-\tilde\lambda x)}{\tilde\beta(\tilde\lambda-\tilde\lambda x)-x}dx\}.$$

式(6)左边 $Q(z)$ 为 $Geo/G/1$ 重试排队队长的概率母函数, 右边正是 $M/G/1$ 重试排队队长的概率母函数(可见 Shang[9] 的引理 1).

这表明 $Geo/G/1$ 重试排队队长与 $M/G/1$ 重试排队队长当 $\Delta\to0$ 时是对等的, 那么对于定理 1 得到的结果, 连续时间也应存在.

引理 3[6] 如果 $M/G/1$ 重试排队的服务时间有有限指数阶矩, 即 $\tilde\gamma\equiv\sup\{t\in R: Ee^{t\tilde B}<\infty\}>0$, 其中: $\tilde\sigma$ 满足

$$\tilde\beta(\tilde\lambda-\tilde\lambda\tilde\sigma)=\tilde\sigma,\ 1<\tilde\sigma<1+\frac{\tilde r}{\tilde\lambda}.\tag{7}$$

则有，当 $n\to\infty$ 时，有

$$P(C=0,N=n)\sim \tilde{c}_0 n^{a-1}\tilde{\sigma}^{n}, \tag{8}$$

$$P(C=1,N=n)\sim \tilde{c}_1 n^{a}\tilde{\sigma}^{n}, \tag{9}$$

常数 $\tilde{c}_0>0,\tilde{c}_1>0,a>0,\tilde{\sigma}>1$.

定理2 若有式(7)成立，则

$$P(N_\infty>l)\sim P(N_\mu>l). \tag{10}$$

证明 由定理1离散时间与连续时间排队队长的关系，以及式(8)和式(9)知式(10)成立

4 结 论

本文利用重试机制排队的性质，采用随机分解的方法得到了 $Geo/G/1$ 重试排队稳态队长尾分布与其相应的标准 $Geo/G/1$ 排队稳态队长的尾分布的渐近关系，进而利用离散时间排队与相应连续时间排队之间的关系，将此结果应用于连续时间情形 对于批到达情形，两种排队系统应都有类似结果 另外，以上结果是在假设服务时间具有有限阶矩条件下得到的，对于其它的一般情况还需继续进行研究

参考文献:

[1] Gross D. Foundamentals of Queueing Theory (Second Ed.) [M]. New York: Johns Wiley-Interscience, 1985.

[2] Meisling T. Discrete time queue theory[J]. Open. Res., 1958, 6: 96-105.

[3] Hunter J J. Mathematical Techniques of Applied Probability//Discrete-Time Models: Techniques and Applications [M]. New York: Academic Press, 1983.

[4] 田乃硕，徐秀丽，马占友 离散时间排队[M]. 北京: 科学出版社，2008.

[5] Takagi H. Queueing Analysis Discrete Time Systems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1993.

[6] Kim B. Tail asymptotics for the queue size distribution in a discrete-time Geo/G/1 retrial queue[J]. Queueing System, 2009, 61: 243-254.

[7] Yang T. On the steady-state queue size distribution of the discrete-time Geo/G/1 queue with repeated customers[J]. Queueing System, 1995, 21: 199-215.

[8] Wang J T. Discrete-time Geo/G/1 retrial queue with general retrial times and starting failures[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 45: 853-863.

[9] Shang W X, Liu L M, Li Q L. Tail asymptotics for the queue length in an M/G/1 retrial queue[J]. Queueing System, 2006, 52: 193-198.