第 33 卷第 4 期　　系统工程理论与实践　　Vol.33, No.4
2013 年 4 月　　Systems Engineering — Theory & Practice　　Apr., 2013

文章编号: 1000-6788(2013)04-1006-07　　中图分类号: O226　　文献标志码: A

基于 $Geom/G/1$ 休假排队的顾客止步策略研究

刘维奇 [1,2], 姚军燕 [2], 李继红 [1]

(1. 山西大学 管理科学与工程研究所, 太原 030006; 2. 山西大学 数学科学学院, 太原 030006)

摘　要　将决策行为引入排队模型中, 以顾客追求利益最大化为出发点, 研究空竭服务、多重休假 $Geom/G/1$ 排队模型中顾客的优化止步策略. 在不可见排队的前提下, 基于"收益 - 成本"结构, 采取均值分析的方法, 构建顾客个人和顾客总体的收益函数, 进而, 在不同参数范围内, 分析并确定出顾客均衡策略和社会最优策略. 最后, 通过数值模拟完善结论.

关键词　休假排队; 顾客止步; 顾客均衡策略; 社会最优策略

Analysis of optimal balking strategies for customers in $Geom/G/1$ queue with vacation

LIU Wei-qi[1,2], YAO Jun-yan[2], LI Ji-hong[1]

(1. Institute of Management Science and Engineering, Shanxi University, Taiyuan 030006, China; 2. School of Mathematical Science, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)

Abstract In this paper, the decision-making behavior is introduced into the queuing models, starting from the customer to maximize the interests, the customer optimal balking strategies in the $Geom/G/1(ES, MV)$ has been studied. On the premise of unobservable queue, based on a natural reward-cost structure, the overall profit function about the individual customer and the whole customers are constructed by a method of mean value analysis, then the customer equilibrium balking strategies and socially optimal balking strategies are analyzed and determined within the parameters of different ranges. At last, the conclusion is improved by numerical simulation.

Keywords vacation queue; customer balking; customer equilibrium balking strategies; socially optimal balking strategies

1 引言

现代社会, 管理机构的运行越来越复杂, 由于顾客来源的不确定性和机构自身服务能力的限制, 系统运行过程中必然会产生排队等待现象. 将现实问题中的服务系统抽象成不同类型的排队模型, 采用各种方法给出相应的性能指标, 进而设计系统的合理运作水平, 成为排队论的主要研究工作. 休假策略是模拟实际系统运行的一种有效机制, 在此机制下, 当服务系统中仅有少量顾客或没有顾客时, 暂停原有工作, 引入一段通常理解的休假期, 在休假期内从事其它工作, 以减少资源损耗, 降低系统成本. 此类休假排队模拟了很多管理机构和通讯网络的实际运作, 研究工作在理论和实际应用领域都取得了丰富成果 [1−4].

多数排队文献 [1−4] 都是从传统观点出发研究问题, 即顾客本身不做选择, 即使存在一些动态控制, 也是服务系统做出变动后顾客被动接受. 但随着服务机构的竞争越来越激烈, 顾客在服务中亦有选择的权力. 顾客可以根据掌握的服务机构信息, 以自身利益为出发点, 决定是进入机构接受服务, 还是离开, 去别的服务机构. 因此为了趋于真实的排队系统, 有必要从顾客角度出发, 探讨顾客采取什么样的策略可以使自身收益最大. 近年来, 这一研究成为一种趋势, 在多数已发表的文献中, 以顾客的服务收益或成本为出发点, 基于"收益 - 成本"结构 [5] 确定决策, 顾客可以选择进入或止步, 等待或离开, 购买优先权或不购买. 目前的研究热点是寻找顾客均衡策略和 (或) 社会最优策略, 前者是从顾客个人利益角度考虑, 后者是从顾客整体利益角度

收稿日期: 2010-12-14
资助项目: 教育部人文社会科学研究项目 (10YJC630114, 07JA630027); 山西省高校人文社科重点研究基地项目 (20083006)
作者简介: 刘维奇 (1963–), 男, 汉, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程和时间序列分析等, E-mail: liuwq@sxu.edu.cn.

考虑.

这一研究的开拓工作至少要追溯到 Naor[6] 和 Edelson 与 Hilderbrand[7], 他们对 $M/M/1$ 排队模型中的顾客困境问题进行了探讨, 得出了基于简单线性 "收益 - 成本" 结构的顾客均衡策略和社会最优策略, 这一领域的更多基本结论可在 Hassin 和 Haviv 的综合专著 [8] 上找到. 另外, 一些学者对各种经典排队模型的决策问题已经做了探讨, 其中 Haviv 与 Kerner[9], Mandelbaum 与 Yechiali[10] 是在全可见经典 $M/G/1$ 排队模型的基础上研究顾客决策问题. 然而把休假服务机制与顾客决策结合起来的研究还很少, 成为一种新的尝试, 并且更趋近于现实. 本文是在服务时间和休假时间都服从一般分布的单服务员排队模型的基础上研究顾客决策问题, 并假定顾客在作决策之前对系统队长及服务员状态都不了解, 简称不可见排队.

本文的安排如下: 第 2 节, 描述排队模型, 引入 "收益 - 成本" 结构; 第 3 节, 进行均值分析 [11], 得到顾客的平均延迟, 进而给出顾客均衡策略和社会最优策略; 第 4 节, 对所得结果进行模拟; 第 5 节给出结论.

2 模型描述

首先引入经典 $Geom/G/1$ 排队模型, 顾客到达遵循参数为 $p(0<p<1)$ 的 $Bernoulli$ 过程, 到达间隔 Y 相互独立且服从同一个几何分布

$$P(Y=j)=p\bar{p}^{j-1},\ j=1,2,\cdots,0<p<1,$$

其中 $\bar{p}=1-p$, 换言之, 每一时刻 n^-(即时刻 $t=n$ 的前夕) 顾客以概率 p 到达, 以概率 $\bar{p}$ 无到达, 并且不同时刻的到达行为相互独立, 在这样的情况下, $[0,n]$ 内到达的顾客数 A_n 服从二项分布

$$P(A_n=j)=C_n^j p^j\bar{p}^{n-j},\ j=1,2,\cdots,n.$$

服务时间 B 服从一般分布 $B(x)$, 具有有限一、二阶矩, 即 $E(B)<\infty, E(B^2)<\infty$, 其分布、$PGF$ (概率母函数) 和均值分别为

$$b_j=P(B=j), j\geq 1,$$

$$G(z)=E(z^B)=\sum_{j=1}^{\infty}b_jz^j,$$

$$b=E(B)=G'(z)|_{z=1}=\sum_{j=1}^{\infty}jb_j.$$

记 R_B 为剩余服务时间, 其概率分布和均值分别为

$$q_k=\frac{1}{E[B]}\sum_{j=k+1}^{\infty}b_j, k=0,1,2,\cdots,\qquad E[R_B]=\frac{E[B(B-1)]}{2E[B]}.$$

其次在经典 $Geom/G/1$ 排队模型中, 引入空竭服务、多重休假策略, 一次休假长度 V 是正整数值随机变量, 分布函数为 $V(x)$, 具有有限一、二阶矩, 即 $E(V)<\infty, E(V^2)<\infty$, 其分布、$PGF$ 和均值分别为

$$v_j=P(V=j), j\geq 1,$$

$$V(z)=E(z^V)=\sum_{j=1}^{\infty}z^jv_j,$$

$$v=E(V)=V'(z)|_{z=1}=\sum_{j=1}^{\infty}jv_j.$$

记 R_V 为剩余休假时间, 其概率分布和均值分别为

$$w_k=\frac{1}{E[V]}\sum_{j=k+1}^{\infty}v_j, k=0,1,2,\cdots,\qquad E[R_V]=\frac{E[V(V-1)]}{2E[V]}.$$

本文假设到达间隔、服务时间和休假时间相互独立, 采取 $FCFS$(先到先服务) 服务原则.

在此, 我们感兴趣的是在顾客到达后将采取何种策略, 使自身的期望收益最大化. 为量化前面提到的 "收益 - 成本" 结构, 记顾客接受服务后所得收益为 K, 进入系统后单位时间的逗留花费为 C(逗留时间包括等待时间和服务时间).

假设不等式

$$K > C(E[R_V] + E[B]) \tag{1}$$

成立, 当服务员处于休假时, 顾客至少需等待剩余休假时间加上自身接受服务的时间. 上式确保顾客接受服务后所得收益超过其预期花费. 若 (1) 式不成立, 则当系统为空时, 会出现始终没有顾客进入系统的现象, 这是没有研究意义的.

为使结果更合理, 另假设不等式

$$pE[B] < 1 \tag{2}$$

成立, 以保证系统最终可达平衡状态.

基于上述假设, 分别记策略集为 Q, 效用函数为 F, 令 $F(a,b)$ 为标定顾客采取策略 a, 而其他顾客选择策略 b 时, 标定顾客的收益或所得. 若对 $\forall q \in Q$, 均有 $F(q_e,q_e) \geq F(q,q_e)$, 则称 q_e 为一个 (对称纳什) 均衡策略. 事实上, 当所有顾客选定的策略形成纳什均衡后构成一个平衡局势, 全体顾客中任何一个单方面地改变自己的策略, 只可能使自己的收益下降 (或不变), 绝不可能使自己的收益增加, 在该策略组合中每个顾客的策略都是对其他人的策略的最优策略反应 (纳什均衡的思想).

3 不可见排队

在不可见的前提下, 顾客有两个纯策略 (离开 (记为 0) 或进入 (记为 1)), 一个随机策略 q(以概率 $q(q \in (0,1))$ 进入). 如果所有顾客都采取策略 q, 则顾客的到达过程是参数为 pq 的几何分布.

3.1 预期逗留时间

为确定哪种策略更合适, 首先要明确平均逗留时间的表达式, 这里, 以顾客均采取策略 q 的情况给予讨论.

记 L 为系统队长, 即系统中的顾客数 (包括正在接受服务的顾客), I 为服务员的状态 ($I \in \{0,1\}$, 1: 忙期, 0: 休假), S 为选择进入系统的顾客的逗留时间, p_i 为服务员处于状态 i 的概率, $i \in \{0,1\}$.

根据 Little 公式, 有

$$p_1 = pqE[B] \tag{3}$$

及

$$E[L] = pqE[S] \tag{4}$$

标定一位选择进入系统的顾客, 则顾客进入系统后发现服务员处于状态 $i(i \in \{0,1\})$ 的概率为

$$\frac{pqp_i}{pqp_0 + pqp_1} = p_i.$$

若该顾客发现服务员处于休假期, 则其逗留时间为服务员的剩余休假时间加上 $L+1$ 个服务时间 (顾客到达时系统队长 L 加上自身). 注意: 根据 PASTA 性质, 标定顾客到达时系统队长 L 的分布与任意时间系统队长 L 的分布相同.

若该顾客发现服务员处于忙期, 则其逗留时间为正在接受服务的顾客的剩余服务时间加上 L 个服务时间 (除正在接受服务的顾客, 剩余的 $L-1$ 个顾客加上自身).

由此, 得等式

$$E[S] = p_0(E[R_V] + (E[L]+1)E[B]) + p_1(E[R_B] + E[L]E[B]) \tag{5}$$

由 (3)-(5) 式及 $p_0 + p_1 = 1$ 可得:

引理 1 在不可见 $Geom/G/1$ 排队模型中, 当顾客均采取策略 q 时, 选择进入系统的顾客的平均逗留时间为

$$E[S] = E[R_V] + E[B] + \frac{pqE[B]}{1-pqE[B]}E[R_B] \tag{6}$$

3.2 顾客均衡策略

标定一位到达顾客, 如果该顾客选择离开, 则其收益值为 0, 如果该顾客选择进入, 记其收益函数为

$$R_e(q) = K - CE[S] = K - C\left(E[R_V] + E[B] + \frac{pqE[B]}{1-pqE[B]}E[R_B]\right) \tag{7}$$

若 $R_e(q)>0$, 则顾客选择进入; 若 $R_e(q)=0$, 则选择进入或者离开是无差别的; 若 $R_e(q)<0$, 则选择离开. 显然, (7) 式是 q 的单调递减函数, 因此, 有唯一零解 q_e^*

$$q_e^*=\frac{1}{pE[B]}\left(1-\frac{E[R_B]}{\frac{K}{C}-E[R_V]-E[B]+E[R_B]}\right) \tag{8}$$

且有

$$\begin{cases} q_e^*\le 0, & \dfrac{K}{C}\le E[R_V]+E[B],\\ q_e^*\in(0,1), & E[R_V]+E[B]<\dfrac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\dfrac{pE[B]}{1-pE[B]}E[R_B],\\ q_e^*\ge 1, & E[R_V]+E[B]+\dfrac{pE[B]}{1-pE[B]}E[R_B]\le\dfrac{K}{C}.\end{cases}$$

下面确定顾客均衡策略, 在此, 分三种情况讨论

1、如果 (K,C) 满足

$$\frac{K}{C}\le E[R_V]+E[B],$$

则对 $\forall q\in[0,1]$, 均有 $R_e(q)\le 0$. 因此, 在这种情况下, '以概率 0 进入' 是唯一顾客均衡策略.

2、如果 (K,C) 满足

$$E[R_V]+E[B]<\frac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\frac{pE[B]}{1-pE[B]}E[R_B],$$

由 $R_e(q)$ 的单调性知: $R_e(q_e^*)=0$, 当 $q<q_e^*$ 时, $R_e(q)>0$, 当 $q>q_e^*$ 时, $R_e(q)<0$. 根据纳什均衡的思想, 则在这种情况下, '以概率 q_e^* 进入' 是唯一顾客均衡策略.

3、如果 (K,C) 满足

$$E[R_V]+E[B]+\frac{pE[B]}{1-pE[B]}E[R_B]\le\frac{K}{C},$$

则对 $\forall q\in[0,1]$, 均有 $R_e(q)\ge 0$. 因此, 在这种情况下, '以概率 1 进入' 是唯一顾客均衡策略.

综上可得:

定理 1 在不可见 $Geom/G/1$ 排队模型中, 假设 (1) 式和 (2) 式均成立, 则 '以概率 q_e 进入' 是唯一顾客均衡策略. 记 q_e 为

$$q_e=\begin{cases} q_e^*, & E[R_V]+E[B]<\dfrac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\alpha E[R_B]\\ 1, & E[R_V]+E[B]+\alpha E[R_B]\le\dfrac{K}{C}\end{cases} \tag{9}$$

其中 q_e^* 由 (8) 式给出, $\alpha=\frac{pE[B]}{1-pE[B]}$.

3.3 社会最优策略

对于社会收益者来说, 决策问题就变成制定一个随机策略 q, 使得单位时间的社会收益 $R_s(q)$ 最大, 其中 $R_s(q)=pqK-CE[L]$, 由 (4) 式和 (6) 式得

$$R_s(q)=pq\left(K-C\left(E[R_V]+E[B]+\frac{pE[B]}{1-pE[B]}E[R_B]\right)\right) \tag{10}$$

显然, 社会收益函数也可视为 (K,C) 的方程.

根据 (10) 式, 解方程 $R_s'(q)=0$ 得 $q=q_s^*$, 其中

$$q_s^*=\frac{1}{pE[B]}\left(1-\sqrt{\frac{E[R_B]}{\frac{K}{C}-E[R_V]-E[B]+E[R_B]}}\right) \tag{11}$$

由于对 $\forall q\in[0,1]$, 均有 $pqE[B]<1$, 从而 $R_s''(q)<0$, 故方程 $R_s(q)$ 是凹函数, 在点 $q=q_s^*$ 处取得最大值. 且有

$$\begin{cases} q_s^*\le 0, & \dfrac{K}{C}\le E[R_V]+E[B],\\ q_s^*\in(0,1), & E[R_V]+E[B]<\dfrac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\dfrac{pE[B]}{1-pE[B]}\left(1+\dfrac{1}{1-pE[B]}\right)E[R_B],\\ q_s^*\ge 1, & E[R_V]+E[B]+\dfrac{pE[B]}{1-pE[B]}\left(1+\dfrac{1}{1-pE[B]}\right)E[R_B]\le\dfrac{K}{C}.\end{cases}$$

类似顾客均衡策略, 在此, 同样分三种情况讨论:

1、如果 (K,C) 满足

$$\frac{K}{C}\le E[R_V]+E[B],$$

则对 $\forall q\in[0,1]$, 均有 $R_s'(q)\le 0$, 即 (10) 式关于 q 单调递减, 所以对 $\forall q\in[0,1]$, 有 $R_s(0)$ 最大. 因此, 在这种情况下, '以概率 0 进入' 是唯一社会最优策略.

2、如果 (K,C) 满足

$$E[R_V]+E[B]<\frac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\frac{pE[B]}{1-pE[B]}\left(1+\frac{1}{1-pE[B]}\right)E[R_B],$$

由 $R_s''(q)<0, q\in[0,1]$ 知: $R_s'(q_s^*)=0$, 当 $q<q_s^*$ 时, $R_s'(q)>0$, 当 $q>q_s^*$ 时, $R_s'(q)<0$, 即 $q\in[0,q_s^*)$ 时, $R_s(q)$ 关于 q 单调递增, $q\in(q_s^*,1]$ 时, $R_s(q)$ 关于 q 单调递减, 从而 $R_s(q)$ 在 $q=q_s^*$ 处取值最大. 因此, 在这种情况下, '以概率 q_s^* 进入' 是唯一社会最优策略.

3、如果 (K,C) 满足

$$E[R_V]+E[B]+\frac{pE[B]}{1-pE[B]}\left(1+\frac{1}{1-pE[B]}\right)E[R_B]\le\frac{K}{C},$$

则对 $\forall q\in[0,1]$, 均有 $R_s'(q)\ge 0$, 即 (10) 式关于 q 单调递增, 所以对 $\forall q\in[0,1]$, 有 $R_s(1)$ 最大. 因此, 在这种情况下, '以概率 1 进入' 是唯一社会最优策略.

综上可得:

定理 2 在不可见 $Geom/G/1$ 排队模型中, 假设 (1) 式和 (2) 式均成立, 则 '以概率 q_s 进入' 是唯一社会最优策略. 记 q_s 为

$$q_s=\begin{cases} q_s^*, & E[R_V]+E[B]<\dfrac{K}{C}<E[R_V]+E[B]+\beta E[R_B] \\ 1, & E[R_V]+E[B]+\beta E[R_B]\le\dfrac{K}{C} \end{cases}\tag{12}$$

其中 q_s^* 由 (11) 式给出, $\beta=\frac{pE[B]}{1-pE[B]}(1+\frac{1}{1-pE[B]})$.

4 模拟

在本节中, 将通过一些数值例子验证前面所得结果. 在此, 假设单位时间的逗留花费 $C=1$, 此假设在适当缩放收益/成本的比例后均可得到.

由所得顾客均衡策略 q_e 和社会最优策略 q_s 的表达式可知, 在部分系统参数 (K, p, $E[R_B]$ 和 $E[R_V]$) 取值固定时, q_e 和 q_s 分别是关于 $K, p, E[R_B]$ 和 $E[R_V]$ 的函数. 图 1 和图 2 分别显示 $(p,E[B],E[R_B],E[R_V])=(0.5,1.0,4.0,4.6)$(图 1(a)), $(K,E[B],E[R_B],E[R_V])=(7.0,1.0,4.0,4.6)$(图 1(b)), $(K,p,E[B],E[R_V])=(7.0,0.2,3.0,2.0)$(图 2(a)), $(K,p,E[B],E[R_B])=(7.0,0.2,3.0,2.0)$(图 2(b)) 时, 顾客均衡策略 q_e 和社会最优策略 q_s 的趋势走向.

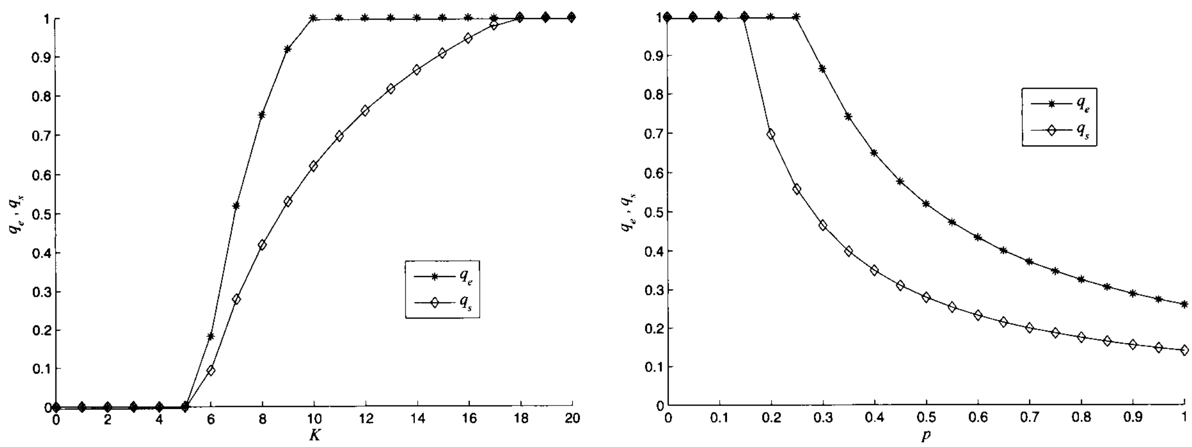

图 1 随 K 和 p 变化的顾客均衡策略和社会最优策略

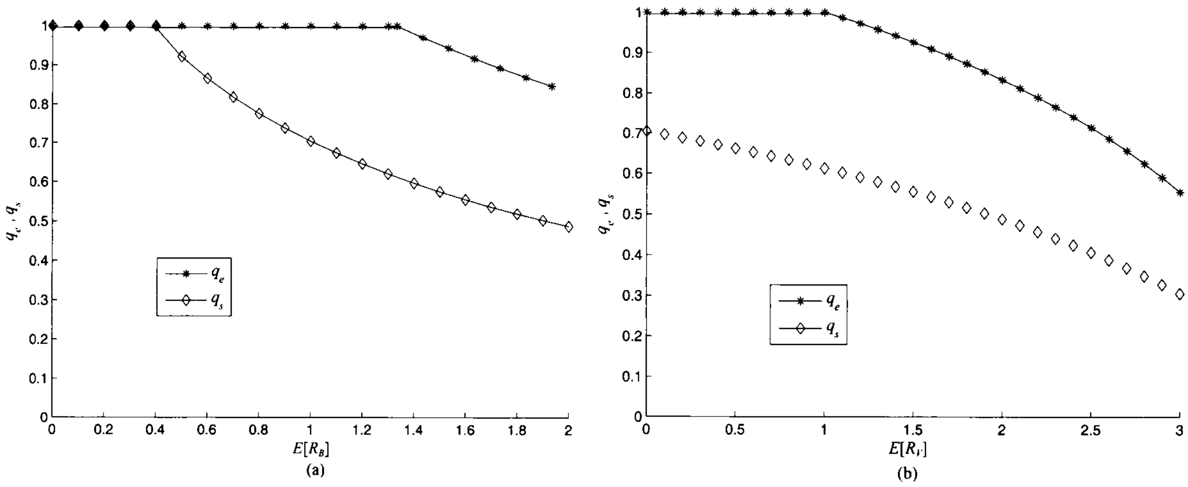

图 2　随 $E[R_B]$ 和 $E[R_V]$ 变化的顾客均衡策略和社会最优策略

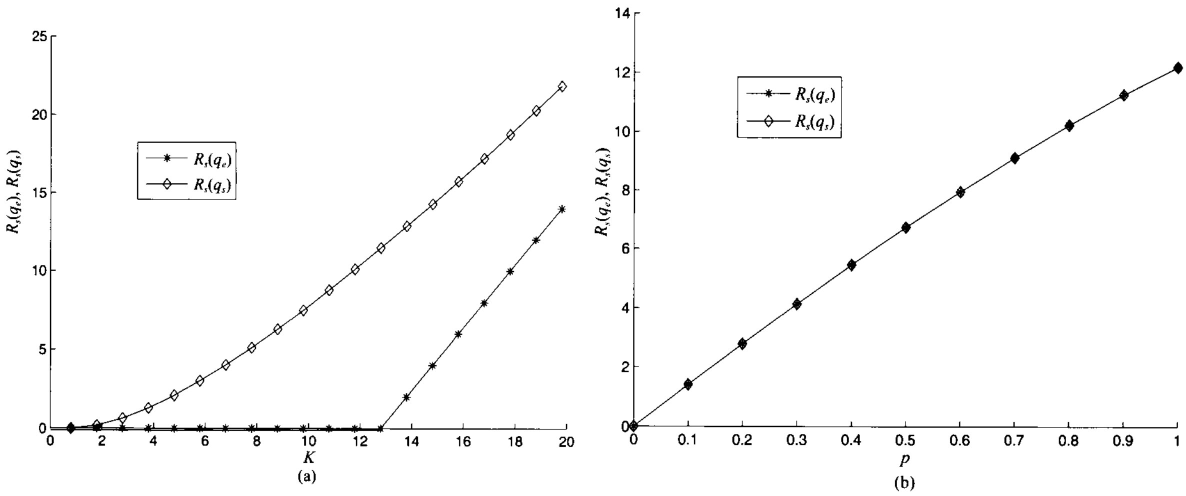

图 3　分别选取 q_e 和 q_s 时, 随 K 和 p 变化的单位时间社会收益

在图 1 中, 顾客均衡策略 q_e 和社会最优策略 q_s 都随着收益值 K 的增大而增大, 随着到达概率 p 的增大而减小. 这是因为收益值的增大导致顾客进入系统的意愿加强, 所以选择进入系统的概率会随着 K 值的增大逐渐趋于 1, 而较高的到达概率可能导致系统拥挤, 考虑到这一情况, 顾客选择进入系统的概率会随 p 值的增大逐渐降低.

在图 2 中, 顾客均衡策略 q_e 和社会最优策略 q_s 都随着 $E[R_B]$ 和 $E[R_V]$ 值的增大而减小, 这是由于较长的剩余服务时间和剩余休假时间都会影响顾客进入系统的意愿, 这与现实情况相符.

此外, 在图 1 和图 2 中, 可以清楚的看到在相应系统参数的取值范围内均有 $q_s \leq q_e$.

由 (10) 式可知, 单位时间的社会收益 $R_s(q)$ 也是系统参数的函数. 当参数的取值都确定时, q_e 和 q_s 可以通过定理 1 和定理 2 准确得到. 下面考虑收益值 K 及到达概率 p 对社会收益 $R_s(q), q \in \{q_e, q_s\}$ 的影响, 分别取 $E[B] = 0.4$, $E[R_B] = 3$, $E[R_V] = 0.4$, $p = 2.0$(图 3(a)), $K = 15.0$(图 3(b)).

在图 3(a) 中, $R_s(q_e)$ 和 $R_s(q_s)$ 之间的差值相当于当顾客忽略随后到达的顾客可能带来的负面影响, 只考虑个人利益时, 社会利益的损失.

在图 3(b) 中, 由于 K 的取值使 q_e 和 q_s 的值都为 1, 所以 $R_s(q_e)$ 和 $R_s(q_s)$ 两条曲线重合, 对于 K 的其他取值情况在此就不给予讨论了.

5　结论

比较顾客均衡策略 q_e 和社会最优策略 q_s 的表达式可知, 对于任意系统参数, 均有 $q_s \leq q_e$, 在图 1 和图 2 中, 这个结论也是可见的. 事实上, 当顾客做出决策使得自身收益最大时, 往往忽略了消极的外在影响, 而在

讨论社会收益最大化时, 会考虑到这些因素. 所以, 在确定社会最优时顾客选择进入系统的概率会相对较小.

参考文献

[1] Zhang Z G, Tian N S. Discrete time Geo/G/1 queue with multiple adaptive vacations[J]. Queueing Systems, 2001, 38: 419–429.

[2] 田乃硕, 徐秀丽, 马占友. 离散时间排队论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
Tian N S, Xu X L, Ma Z Y. Discrete time queue theory[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[3] Tian N S, Zhang Z G. Vacation queueing models: Theory and applications[M]. New York: Springer Verlag, 2006.

[4] 马占友, 刘洺辛, 田乃硕. 空竭服务 Geom/G/1 休假模型 [J]. 运筹学学报, 2004, 8(3): 71–77.
Ma Z Y, Liu M X, Tian N S. Geom/G/1 vacation queueing with exhaustive service[J]. OR Transactions, 2004, 8(3): 71–77.

[5] Sun W, Guo P F, Tian N S, et al. Relative priority policies for minimizing the cost of queueing systems with service discrimination[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33: 4241–4258.

[6] Naor P. The regulation of queue size by Levying tolls[J]. Econometrica, 1969, 37(1): 15–24.

[7] Edelson N M, Hilderbrand D K. Congestion tolls for Poisson queuing processes[J]. Econometrica, 1975, 43(1): 81–92.

[8] Hassin R, Haviv M. To queue or not to queue: Equilibrium behavior in queueing systems[M]. Boston, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[9] Haviv M, Kerner Y. On balking from an empty queue[J]. Queueing System, 2007, 55: 239–249.

[10] Mandelbaum A, Yechiali U. Optimal entering rules for a customer with wait option at an M/G/1 queue[J]. Management Science, 1983, 29(2): 174–187.

[11] Boon M A A, van Wijk A C C, Adan I J B F, et al. A polling model with smart customers[J]. Queueing System, 2010, 66: 239–274.

基于Geom/G/1休假排队的顾客止步策略研究

作者： 刘维奇， 姚军燕， 李继红， LIU Wei-qi， YAO Jun-yan， LI Ji-hong
作者单位： 刘维奇,LIU Wei-qi(山西大学管理科学与工程研究所,太原030006;山西大学数学科学学院,太原030006)， 姚军燕,YAO Jun-yan(山西大学数学科学学院,太原,030006)， 李继红,LI Ji-hong(山西大学管理科学与工程研究所,太原,030006)
刊名： 系统工程理论与实践ISTIC EI PKU CSSCI
英文刊名： Systems Engineering —Theory & Practice
年，卷(期)： 2013,33(4)

参考文献(11条)

1. Zhang Z G;Tian N S Discrete time Geo/G/1 queue with multiple adaptive vacations 2001

2. 田乃硕;徐秀丽;马占友 离散时间排队论 2008

3. Tian N S;Zhang Z G Vacation queueing models:Theory and applications 2006

4. 马占友;刘洺辛;田乃硕 空竭服务Geom/G/1休假模型 2004(03)

5. Sun W;Guo P F;Tian N S Relative priority policies for minimizing the cost of queueing systems with service discrimination 2009

6. Naor P The regulation of queue size by Levying tolls 1969(01)

7. Edelson N M;Hilderbrand D K Congestion tolls for Poisson queuing processes 1975(01)

8. Hassin R;Haviv M To queue or not to queue:Equilibrium behavior in queueing systems 2003

9. Haviv M;Kerner Y On balking from an empty queue 2007

10. Mandelbaum A;Yechiali U Optimal entering rules for a customer with wait option at an M/G/1 queue 1983(02)

11. Boon M A A;van Wijk A C C;Adan I J B F A polling model with smart customers 2010