文章编号: 1000-6788(2013)10-2596-08 中图分类号: O226 文献标志码: A

基于 M/M/1/SV 排队的均衡门限策略

刘维奇[1,2], 马　琰[2,3], 李继红[1]

(1. 山西大学 管理学院, 太原 030006; 2. 山西大学 数学科学学院, 太原 030006;
3. 中南大学 数学与统计学院, 长沙 410004)

摘　要 考虑单重休假 M/M/1 排队, 在部分可视的前提下, 研究顾客的均衡门限策略, 首次将单重休假机制引入到连续时间排队经济学模型中. 系统的决策主体是顾客, 突破了以往只注重服务机构单方面行为的局限. 基于 “收入 - 支出” 结构, 利用马尔可夫过程理论, 通过求解差分方程, 分析了系统的稳态行为, 得到了顾客的平均逗留时间; 进而构造适当的函数, 给出了寻找均衡纯门限策略, 均衡混合门限策略的具体方法并证明之; 而后在不同的策略下, 得出了系统的稳态分布和均衡社会收益; 最后, 通过数值实验分析了均衡行为的各指标对系统参数的敏感性. 研究结果为顾客决策提供了优化建议, 同时为管理者研究系统中的定价问题提供了理论参考.

关键词 排队经济学; 马尔可夫过程; 稳态分布; 均衡门限策略; 社会收益

Equilibrium threshold strategy in the M/M/1/SV queue

LIU Wei-qi[1,2], MA Yan[2,3], LI Ji-hong[1]

(1. College of Management, Shanxi University, Taiyuan 030006, China; 2. College of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410004, China)

Abstract This paper considered the equilibrium threshold strategies of customers in the M/M/1/SV queue, given that customers were informed of only the queue length. To the authors' knowledge, this is the first time that the single vacation policy is introduced into the economics of continuous-time queue. In the system, customers had the right to decide for themselves whether to join or to balk, which broke through the transition that researchers only paid attention to the servers. Based on the “reward-cost” structure and the theory of Markov process, the stationary behavior of the system was analyzed by solving the difference equation and the mean sojourn time was derived. Then by introducing appropriate functions, we provided an algorithm to identify the equilibrium pure and mixed threshold strategies. Moreover, the stationary distribution of the system under the corresponding strategy was analyzed and the social benefit was obtained. Finally, we illustrated the effects of the parameters on the equilibrium behavior via numerical experiments. The results not only provide the customers with optimal strategies but also provide the managers with a good reference to the pricing problem in the queueing system.

Keywords economics of queues; Markov process; stationary distribution; equilibrium threshold strategy; social benefit

1 引言

以往研究服务系统的管理问题时, 大多是从传统的观点出发, 即顾客本身不做决定, 即使系统中存在一些动态控制, 也是服务机构做出调整后, 顾客被动接受. 然而, 在实际情况中, 顾客具有主动性, 他们可以从自身的利益出发, 根据已有的信息进行决策. 为了更好地模拟真实的排队系统, 有必要从顾客的角度出发, 研究排队中的策略问题. 近来, 这一研究方向成为新兴热点. 在已有的文献中, 均假设顾客基于 “收入 - 支出” 结构做出决策, 如是否加入排队, 是否购买优先权等. 由于系统模型实质上是顾客之间的博弈, 所以研究的首要

收稿日期: 2011-09-09
资助项目: 教育部人文社会科学研究项目 (10YJC630114, 07JA630027); 博士后研究项目 (92169); 湖南省研究生科研创新项目
作者简介: 刘维奇 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融工程, 时间序列分析, 排队论, E-mail: liuwq@sxu.edu.cn.

问题是寻找均衡策略.

在排队经济学的研究中, 开创工作要追溯到 Naor[1] 和 Edelson 与 Hildebrand[2], 他们基于简单的 "收入 - 支出" 结构, 讨论了怎样管理和控制 M/M/1 排队系统, 给出了顾客的均衡纯门限策略. 文献 [3] 完善并系统展示了这一领域的基本结果. 之后, 由于门限型策略在排队中有广泛的应用, 文献 [4–6] 分别在优先权, 可视排队和不确定模型中, 对其均衡情形和最优性进行了深入的探讨. 近年来, 一些学者在经典排队系统的基础上, 将启动时间, 中断和维修等特性加入模型, 研究顾客的均衡策略, 如文献 [7–9]. 但是, 已有的研究都未曾涉及到休假服务机制. 另一方面, 带有各种休假的排队系统的稳态理论已经发展成熟, 但是, 还罕有学者把休假思想引入到排队经济学的研究中, 一直没有相关文献问世, 直到孙微 [10] 对一个不可视的带有多重休假策略的排队经济学模型进行了研究.

本文首次将单重休假服务机制引入到连续时间排队经济学模型, 基于 M/M/1/SV 排队系统, 从纯门限和混合门限两个方面, 研究顾客的均衡策略. 本文安排如下: 第 2 节描述系统模型, 介绍顾客的 "收入 - 支出" 结构; 第 3、4 节通过分析系统的稳态行为, 分别寻找均衡纯门限策略, 均衡混合门限策略并证明之, 而后给出在不同门限策略下, 系统的稳态分布和社会收益; 第 5 节进行数值实验, 分析系统各指标对均衡纯门限策略, 均衡混合门限策略和社会收益的影响.

2 模型的描述

假设到达顾客只知道队长信息, 不知道服务员状态 (这种排队也称为部分可视排队). 系统中只有一名服务员, 每次只能服务一位顾客, 采用先到先服务规则. 每当系统变空时, 服务员就进行一次休假. 若休假返回后, 系统中有顾客等待, 则服务员立即开始为顾客服务; 否则, 服务员就进入通常的闲期, 直到下一位顾客到来. 顾客到达独立且服从参数为 λ 的泊松过程; 服务时间独立且服从参数为 μ 的负指数分布; 休假时间独立且服从参数为 θ 的负指数分布, 即平均休假长度为 $\frac{1}{\theta}$. 到达过程, 服务过程以及休假过程相互独立. 为保证系统稳定, 令 $\lambda < \mu$.

令 $(N(t), I(t))$ 表示时刻 t 系统的状态, 其中, $N(t)$ 代表系统中的顾客数; $I(t)$ 代表服务员的状态. 记

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } t \text{ 系统处于休假状态}, \\ 1, & \text{时刻 } t \text{ 系统处于工作状态}. \end{cases}$$

则 $\{N(t), I(t)\}$ 是二维马尔可夫过程. 在部分可视排队中, 顾客只知道 $N(t)$, 不知道 $I(t)$, $N(t) = n,\ n \geq 0$ 表示系统处于状态 $(n, 0)$ 或者处于状态 $(n, 1)$.

我们感兴趣的是到达顾客的决策行为: 是加入排队还是就此止步. 为了描述决策过程, 量化顾客的决策意愿, 下面建立 "收入 - 支出" 结构. 设顾客完成一次服务的收入为 K 个单位, 在系统中每单位逗留时间的支出为 C 个单位. 假设

$$K > \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta}\right) C \tag{1}$$

这一条件保证了当系统为空时, 到达顾客承担的由服务时间和休假时间带来的损耗低于完成服务的收入, 即预期净收益为正值; 否则, 预期净收益为负值, 当系统为空后, 将不会有顾客进入系统. 此外, 假设顾客是风险中性的, 并且做出决定后, 不再反悔.

令 B 表示到达顾客的预期净收益, $\pi^-_{I|N}(0 \mid n)$ 表示队长 $N(t) = n$ 时, 服务员处于休假状态的概率. 若第 $n+1$ 位顾客加入排队, 则他的平均逗留时间为 $\frac{n+1}{\mu} + \frac{\pi^-_{I|N}(0|n)}{\theta}$, 从而

$$B = K - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C\pi^-_{I|N}(0|n)}{\theta} \tag{2}$$

当预期净收益为正值时, 到达顾客才会愿意加入排队.

基于上述框架, 系统模型实质上是顾客间的对称博弈. 记顾客的策略集为 S, 支付函数为 F, 在到达顾客的决策瞬间, 令 $F(a, b)$ 表示当某顾客选择策略 a, 而他之前和之后的其他顾客选择策略 b 时的支付函数. 若对 $\forall s \in S$, 都有 $F(s_e, s_e) \geq F(s, s_e)$, 那么我们称 s_e 是一个 (对称纳什) 均衡策略. 事实上, 每位顾客的策略都是对其他人的策略的最优反应 (纳什均衡的思想). 当所有顾客选择均衡策略时, 没有任何单个顾客有积极性选择其它策略使自己获得更大收益, 从而没有顾客有积极性打破这种均衡.

本文研究的门限型策略 (详见文献 [3]), 在排队系统中十分常见, 有着广泛应用. 设到达顾客有 2 个行为选择 A_1 或 A_2, $n\in N$, $q\in[0,1)$. 纯门限策略 n 是指: 当 $N(t)\leq n-1$ 时, 选择 A_1; 当 $N(t)\geq n$ 时, 选择 A_2. 混合门限策略 $n+q$ 是对纯门限策略 n 与 $n+1$ 的混合, 当 $N(t)\leq n-1$ 时, 选择 A_1; 当 $N(t)=n$ 时, 以概率 q 选择 A_1 或以概率 $1-q$ 选择 A_2(即以概率 q 选择纯门限策略 $n+1$ 或以概率 $1-q$ 选择纯门限策略 n); 当 $N(t)>n$ 时, 选择 A_2. 混合门限策略 $n+q$ 是一种更一般的门限策略, 纯门限策略 n 是它的一种特殊情况 (当 $q=0$ 时).

3 均衡纯门限策略

我们首先寻找顾客的均衡纯门限策略. 假设到达顾客服从纯门限策略 n_e+1: 若 $N(t)\leq n_e$ 则进入系统, 否则止步. M/M/1/SV 排队系统的状态转移图如图 1.

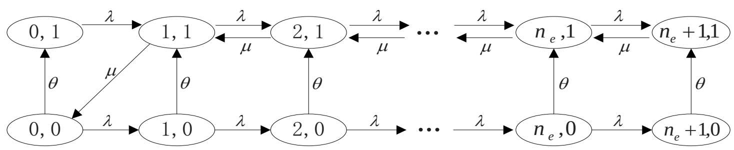

图 1 纯门限策略下的状态转移图

由 (2) 知, 我们需要首先求解系统的稳态分布, 得到服务员处于休假状态的概率 $\pi^-_{I|N}(0|n)$. 由马尔可夫过程理论可得系统的稳态概率满足方程组:

$$p(0,0)(\lambda+\theta) = p(1,1)\mu \tag{3}$$

$$p(n,0)(\lambda+\theta) = p(n-1,0)\lambda, \quad n=1,2,\cdots,n_e \tag{4}$$

$$p(n_e+1,0)\theta = p(n_e,0)\lambda \tag{5}$$

$$p(0,1)\lambda = p(0,0)\theta$$

$$p(n,1)(\lambda+\mu) = p(n-1,1)\lambda+p(n,0)\theta+p(n+1,1)\mu, \quad n=1,2,\cdots,n_e \tag{6}$$

$$p(n_e+1,1)\mu = p(n_e,1)\lambda+p(n_e+1,0)\theta \tag{7}$$

令 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, $\sigma=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}$.

由 (3), (4) 得: $p(n,0)=\frac{\mu}{\lambda+\theta}\sigma^n p(1,1)$, $n=0,1,2,\cdots,n_e$.

由 (5) 得: $p(n_e+1,0)=\frac{\lambda}{\theta}\frac{\mu}{\lambda+\theta}\sigma^{n_e}p(1,1)$.

由 (6) 可知 $\{p(n,1)\mid n=0,1,2,\cdots,n_e+1\}$ 是如下常系数非齐次线性差分方程的解:

$$\mu x_{n+1}-(\lambda+\mu)x_n+\lambda x_{n-1}=-\frac{\theta\mu}{\lambda+\theta}\sigma^n p(1,1), \quad n=1,2,\cdots,n_e \tag{8}$$

根据此类差分方程的求解技巧 (详见文献 [11]), 以下只考虑常规情形, 假设 $\sigma\neq\rho$, 特殊情形可以通过取极限逼近得到.

(8) 对应的齐次方程的特征方程为 $\mu x^2-(\lambda+\mu)x+\lambda=0$, 根为 1, ρ, 从而齐次差分方程 $\mu x_{n+1}-(\lambda+\mu)x_n+\lambda x_{n-1}=0$ 的通解为 $x_n=D1^n+E\rho^n$.

因为 (8) 的非齐次部分是 σ 的几何倍数, 所以其特解为 $x_n^*=F\sigma^n$, 代入 (8) 得: $F=\frac{\mu}{\mu-\lambda-\theta}p(1,1)$. 故原差分方程 (8) 的通解为:

$$x_n=D1^n+E\rho^n+F\sigma^n, \quad n=1,2,\cdots,n_e.$$

当 n 取 1, 2 时, 有以下方程组:

$$\begin{cases} D+E\rho+F\sigma=p(1,1), \\ D+E\rho^2+F\sigma^2=p(2,1)=\dfrac{\lambda(\lambda^2+2\lambda\theta+\theta^2+\lambda\mu)}{\mu(\lambda+\theta)^2}p(1,1). \end{cases}$$

由于多项式求解计算复杂, 我们通过 Matlab 编程得到 $D=0$, $E=\frac{\mu^2\theta-\mu(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}p(1,1)$. 所以

$$p(n,1)=\left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n-1}+\frac{\mu}{\mu-\lambda-\theta}\sigma^n\right]p(1,1), \quad n=0,1,2,\cdots,n_e+1.$$

最后, 由正规化条件 $\sum_{n=0}^{n_e+1}p(n,0)+\sum_{n=0}^{n_e+1}p(n,1)=1$, 可计算出 $p(1,1)$ 的表达式:

$$p(1,1)=\left[\frac{\mu^2}{\theta(\mu-\lambda-\theta)}+\frac{\mu^2(\mu\theta-(\lambda+\theta)^2)}{\lambda(\mu-\lambda)(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}-\frac{\lambda(\mu\theta-(\lambda+\theta)^2)}{(\mu-\lambda)(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n_e}-\frac{\mu\lambda}{\theta(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^{n_e+1}\right]^{-1} \tag{9}$$

这样我们便得到了 M/M/1/SV 排队系统的稳态分布 $\{p(n,i)|0\le n\le n_e+1,\ i=0,1\}$.

在部分可视排队, $\pi^-_{I|N}(0|n)=\frac{\lambda p(n,0)}{\lambda p(n,0)+\lambda p(n,1)}$, $n=0,1,2,\cdots,n_e+1$, 即

$$\pi^-_{I|N}(0|n) = \left[1+\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1},\quad n=0,1,2,\cdots,n_e \tag{10}$$

$$\pi^-_{I|N}(0|n_e+1) = \left[1+\frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e+1}\right)\right]^{-1} \tag{11}$$

从而, 我们就得到了顾客的平均逗留时间 $\frac{n+1}{\mu}+\frac{\pi^-_{I|N}(0|n)}{\theta}$.

为了方便寻找均衡门限策略, 由 (2) 及上面得到的平均逗留时间, 我们构造下列函数:

$$h(n,x) = K-\frac{C(n+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\lambda x+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1},\ x\in[0,1],\ n\in\mathbf{N} \tag{12}$$

$$h_U(n) = h(n,1)=K-\frac{C(n+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1},\ n\in\mathbf{N} \tag{13}$$

$$h_L(n) = h(n,0)=K-\frac{C(n+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1},\ n\in\mathbf{N} \tag{14}$$

显然,

$$h_U(0)=h(0,1)=K-\frac{C}{\mu}-\frac{C}{\theta}\frac{\lambda}{\lambda+\theta}>0,\qquad h_L(0)=h(0,0)=K-\frac{C}{\mu}-\frac{C}{\theta}\frac{\lambda^2+\lambda\theta}{\lambda^2+\lambda\theta+\theta^2}>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}h_U(n)=\lim_{n\to\infty}h_L(n)=-\infty.$$

从而, 存在 n_U 使得

$$h_U(0),h_U(1),h_U(2),\cdots,h_U(n_U)>0,\quad h_U(n_U+1)\le 0 \tag{15}$$

由于对每一个固定的 n, 可以证明 $\frac{\lambda}{\mu-\lambda-\theta}(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}(\frac{\rho}{\sigma})^n)>0$, 从而 $h(n,x)$ 是关于 x 的增函数, 于是 $h_L(n)\le h_U(n),\ n=0,1,2,\cdots$. 特别地, $h_L(n_U+1)\le h_U(n_U+1)\le 0$.

又因为 $h_L(0)>0$, $h_L(n_U+1)\le 0$, 故存在 $n_L\le n_U$ 满足

$$h_L(n_L)>0,\quad h_L(n_L+1),\cdots,h_L(n_U),h_L(n_U+1)\le 0 \tag{16}$$

定理 1 在部分可视 M/M/1/SV 排队, 纯门限策略 n_e+1(若 $N(t)\le n_e$ 则进入系统, 否则止步) 是均衡的, 其中 $n_e=n_L,\cdots,n_U$.

证明 假设顾客到达时系统中有 n 位顾客, 对任意的 $n_e\in\{n_L,\cdots,n_U\}$,

1) 若 $n\le n_e$, 由 (2), (10), (13) 和 (15) 可得, 此顾客的预期净收益:

$$B=K-\frac{C(n+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1}=h_U(n)>0.$$

从而, 顾客选择加入排队.

2) 若 $n=n_e+1$, 由 (2), (11), (14) 和 (16) 可得, 此顾客的预期净收益:

$$B=K-\frac{C(n+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e+1}\right)\right]^{-1}=h_L(n_e+1)\le 0.$$

从而, 顾客会选择止步.

所以, 定理所述的纯门限策略 n_e+1 是均衡的.

注: 当 $n_L=n_U$ 时, 系统存在唯一的均衡纯门限策略 n_L+1, 不存在均衡混合门限策略; 当 $n_L<n_U$ 时, 系统存在多个均衡纯门限策略 (反映了均衡顾客的从众心理), 此时存在均衡混合门限策略.

命题 2 在部分可视 M/M/1/SV 排队, 顾客服从均衡纯门限策略 n_e+1, 系统的稳态概率 $\{p(n)|0\le n\le n_e+1\}$ 如下:

$$\begin{aligned}p(n) &= \left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n-1}+\frac{\mu^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^n\right]p(1,1),\quad n=0,1,2,\cdots,n_e,\\ p(n_e+1) &= \left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n_e}+\frac{\mu(\mu-\lambda)}{\theta(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^{n_e+1}\right]p(1,1).\end{aligned}$$

注: $p(1,1)$ 见 (9) 式, $p(n)=p(n,0)+p(n,1),\quad n=0,1,\cdots,n_e+1$.

由 PASTA 性质, 到达顾客的止步概率为: $p(n_e+1)$, 故单位时间的均衡社会收益:

$$SB=\lambda(1-p(n_e+1))K-C\bigg(\sum_{n=0}^{n_e+1}np(n)\bigg).$$

4 均衡混合门限策略

通常, 寻找均衡纯门限策略是很自然的, 然而, 现实中也会出现这样的情况: 所有顾客服从均衡纯门限策略 n, 但是有位顾客误选了门限 $n+1$, 反而拥有了较少的预期逗留支出; 亦或, 所有顾客服从均衡纯门限策略 $n+1$, 然而某顾客选择了门限 n, 便减少自己的预期逗留支出. 此时, 顾客服从同一个纯门限策略便无法达到均衡了.

鉴于此, 当 $n_L<n_U$ 时, 我们在更一般的门限策略 —— 混合门限策略中, 来寻找均衡策略. 假设到达顾客服从 n_e+q_e 混合门限策略: 在到达时刻 t, 若 $N(t)\le n_e-1$, 则顾客进入系统; 若 $N(t)=n_e$, 则顾客以概率 q_e 进入系统, 或以概率 $1-q_e$ 止步; 若 $N(t)=n_e+1$ 则顾客止步, 系统的状态转移图如图 2.

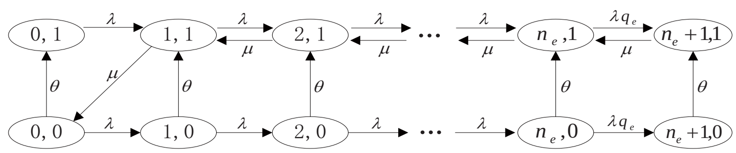

图 2 混合门限策略下的状态转移图

当 $n=0,1,\cdots,n_e-1$ 时, 系统各状态的转移概率与纯门限策略情况下的相同, $p(n,0)$, $p(n,1)$ 的表达式同前, 下面只写出不同之处.

$$\begin{aligned}
p(n_e,0)&=\frac{\mu}{\lambda q_e+\theta}\sigma^{n_e}p(1,1),\\
p(n_e+1,0)&=\frac{\lambda q_e}{\lambda q_e+\theta}\frac{\mu}{\theta}\sigma^{n_e}p(1,1),\\
p(n_e,1)&=\left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n_e-1}+\frac{\mu}{\mu-\lambda-\theta}\sigma_e^n\right]p(1,1),\\
p(n_e+1,1)&=\left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}q_e\rho^{n_e}+\frac{\lambda q_e(\lambda q_e+\mu-\lambda)}{(\lambda q_e+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^{n_e}\right]p(1,1).\\
p(1,1)&=\left[\frac{\mu^2}{\theta(\mu-\lambda-\theta)}+\frac{\mu^2(\mu\theta-(\lambda+\theta)^2)}{\lambda(\mu-\lambda)(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}+\left(q_e-\frac{\mu(\mu\theta-(\lambda+\theta)^2)}{(\mu-\lambda)(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\right)\rho^{n_e}\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{\lambda q_e(\mu-\lambda+\lambda q_e)}{(\lambda q_e+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}-\frac{\mu\lambda}{\theta(\mu-\lambda-\theta)}\right)\sigma^{n_e}\right]^{-1} \qquad (17)
\end{aligned}$$

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n)=\left[1+\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1},\quad n=0,1,2,\cdots,n_e-1 \qquad (18)$$

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n_e)=\left[1+\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right)\right]^{-1} \qquad (19)$$

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n_e+1)=\left[1+\frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right)+\frac{\theta}{\mu}\right]^{-1} \qquad (20)$$

定理 3 在部分可视 M/M/1/SV 排队, 混合门限策略 n_e+q_e(在到达时刻 t, 若 $N(t)\le n_e-1$ 则顾客进入系统; 若 $N(t)=n_e$ 则顾客以概率 q_e 进入系统, 或以概率 $1-q_e$ 止步; 若 $N(t)=n_e+1$ 则顾客止步) 是均衡策略, 其中

$$n_e=n_L+1,\cdots,n_U,\quad q_e=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{1+\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}}\left(\frac{C}{\theta\left(R-\frac{C(n_e+1)}{\mu}\right)}-1\right)-\theta\right].$$

证明 对任意的 $n_e\in\{n_L+1,\cdots,n_U\}$, q_e 是 $h(n_e,x)=0$ 的唯一根. 因为 $h(n,x)$ 是 x 的连续函数, 并且 $h(n_e,0)h(n_e,1)=h_L(n_e)h_U(n_e)\le 0$, 所以 q_e 是一个概率. 当 $q_e=0,1$ 时, (n_e,q_e) 为纯门限策略, 故以下仅对 $q_e\in(0,1)$ 进行讨论.

假设顾客到达时系统中有 n 位顾客, 所有顾客服从 n_e+q_e 混合门限策略,

1) 若 $n \le n_e - 1$, 由 (2), (13), (15) 和 (18) 可得, 此顾客的预期净收益:

$$B = K - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 + \frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1} = h_U(n) > 0.$$

从而, 顾客选择加入排队.

2) 若 $n = n_e$, 由 (2), (12) 和 (19) 可得, 此顾客的预期净收益:

$$B = K - \frac{C(n_e+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 + \frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right)\right]^{-1} = h(n_e, q_e) = 0.$$

从而, 顾客对加入排队还是止步是中立的, 而以概率 q_e 进入是理想的 (均衡的思想).

注: 若 $q_e' < q_e$, 则 $B < 0$, 不能达到均衡; 若 $q_e' > q_e$, 则 $B > 0$, 顾客进入系统, 即 $q_e' = 1 \bar{\in} (0,1)$.

3) 若 $n = n_e + 1$, 由 (2), (14), (16) 和 (20) 可得, 此顾客的预期净收益:

$$\begin{aligned} B &= K - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 + \frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1} \\ &< K - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 + \frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1} \\ &= K - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 + \frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{\lambda(\lambda+\theta)}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e+1}\right)\right]^{-1} = h_L(n_e+1) \le 0. \end{aligned}$$

从而, 顾客选择止步.

所以, 定理所述的混合门限策略 $n_e + q_e$ 是均衡的.

命题 4 在部分可视 M/M/1/SV 排队, 顾客服从均衡混合门限策略 $n_e + q_e$, 系统的稳态概率 $\{p(n) | 0 \le n \le n_e + 1\}$ 如下:

$$\begin{aligned} p(n) &= \left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n-1} + \frac{\mu^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^n\right]p(1,1), \quad n = 0,1,2,\cdots,n_e-1, \\ p(n_e) &= \left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\rho^{n_e-1} + \frac{\mu(\mu-\lambda+\lambda q_e)}{(\lambda q_e+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^{n_e}\right]p(1,1), \\ p(n_e+1) &= \left[\frac{\mu\theta-(\lambda+\theta)^2}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}q_e\rho^{n_e} + \frac{\lambda q_e(\mu^2-\mu\lambda-\theta\lambda+\theta\lambda q_e)}{\theta(\lambda q_e+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}\sigma^{n_e}\right]p(1,1). \end{aligned}$$

注: $p(1,1)$ 见 (17) 式.

由 PASTA 性质, 在部分可视的 M/M/1/SV 排队, 到达顾客的止步概率为: $p(n_e)(1-q_e) + p(n_e+1)$, 因此, 单位时间的均衡社会收益:

$$SB = \lambda(1 - p(n_e)(1-q_e) - p(n_e+1))K - C\left(\sum_{n=0}^{n_e+1} np(n)\right).$$

5 数值实验

前面我们得到了均衡纯门限策略 $n_e + 1$, $n_e \in \{n_L, \cdots, n_U\}$, 均衡混合门限策略 $n_e + q_e$, $n_e \in \{n_L + 1, \cdots, n_U\}$ 和两种均衡策略下的社会收益 SB. 本节我们通过一系列数值实验, 分析 n_e, q_e, SB 对系统参数 λ, K, θ 的敏感性. 不失一般性, 假设 $\mu = C = 1$.

在图 3 中, 门限端点 n_U, n_L 随着 λ 的增大而大体呈阶梯式增长, 当 λ 超出一定值后, 门限端点 n_U 持平不变. 这与日常排队现象是相符的, 顾客到达较少时, 系统并不拥挤, 顾客的逗留支出较少, 所以进入门限增大; 当到达率增大到一定水平后, 预期逗留支出超出了完成服务的收入, 故门限值不再增大. 当 $n_L < n_U$ 即混合策略存在时, 进入概率 q_e 随着 λ 的增大而起伏变化. 将 q_e 的变化图与 n_e 的变化图对比, 我们发现: 若门限值不变, 则进入概率减少; 若门限值增大, 则进入概率增大. 事实上, 随着 λ 的增大, 到达顾客增多, 若门限不变, 则止步的顾客增多, 故顾客进入系统的概率减少; 若门限增大, 则止步的顾客相对减少, 故顾客进入系统的概率增大. 社会收益 SB 随着 λ 的增大而先增大后减小. 当进入门限较小时, 顾客的逗留支出较少, 社会收益不断增多; 进入门限增大到一定程度时, 系统变得拥挤, 顾客的逗留支出变大, 社会收益有所减少.

在图 4 中, 门限端点 n_U, n_L 随着 K 的增大而大部分呈现出线性增长. 由于完成服务的收入增多, 更多的顾客愿意进入系统. n_U, n_L 的增长率相似, 说明它们对顾客完成服务的收入的敏感性大致相同. 进入概率 q_e 随着 K 的增大而缓慢减少至趋于平稳, 这反映了进入概率对于参数 K 的敏感性较低. 由前两幅图: 门限值持续增长, 进入概率微小变化, 我们不难理解第三幅图中社会收益关于 K 的增长变化.

在图 5 中, 门限端点 n_U, n_L 随着 θ 的增大而增大, 敏感性先强后弱. 当 $n_U = n_L$ 时, 不存在混合门限策略, 所以 q_e 的变化图中尾部无值, 对应的社会收益不再考虑. 由于 θ 增大, 到达顾客的平均等待休假时间变小, 故逗留支出减少, 从而进入系统的门限增大, 社会收益也随之增长. 当 θ 增大到一定值时, 到达顾客的平均逗留时间变化很小, 门限值趋于平稳, 此时社会收益只有小幅增长.

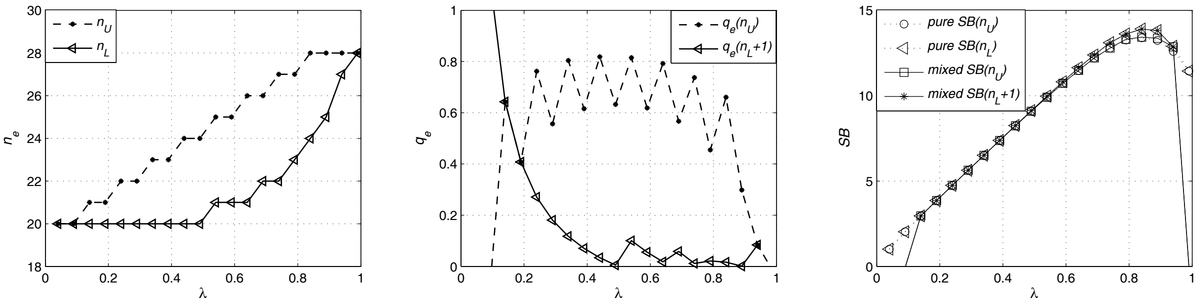

图 3 关于参数 λ 的变化图 ($\mu = 1; C = 1; \theta = 0.1; K = 30$)

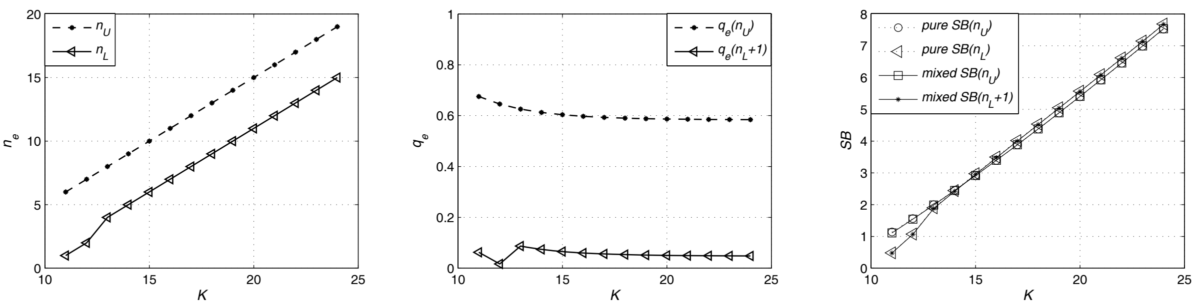

图 4 关于参数 K 的变化图 ($\mu = 1; C = 1; \lambda = 0.6; \theta = 0.1$)

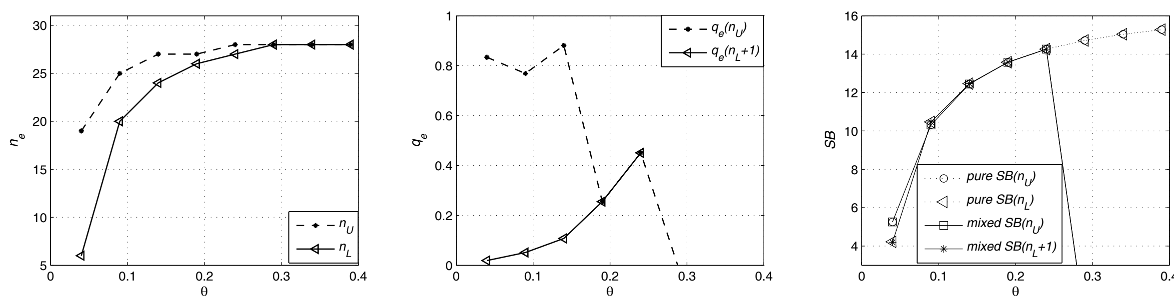

图 5 关于参数 θ 的变化图 ($\mu = 1; C = 1; \lambda = 0.6; K = 30$)

6 结论与展望

本文基于单重休假 M/M/1 排队, 研究顾客的均衡门限策略, 从纯门限和混合门限两个角度, 提供了寻找均衡策略的算法, 并给出了在相应的策略下, 系统的稳态分布和单位时间的社会收益. 从顾客利益出发进行研究, 贴合实际的排队系统, 突破了以往只注重服务机构单方面行为的局限, 得到的均衡策略可以指导实际消费个体审时度势, 采取优化的排队决策. 同时, 研究结果可以帮助管理者探讨排队系统中的定价问题, 如入场费用设置, 优先权分配等, 制定合理的价格机制, 在具体的经济活动中获得更大的收益.

迄今为止, 有关休假排队经济学的研究非常少, 本文首次将单重休假机制引入到连续时间排队经济学模型中, 开展研究. 由于连续时间排队可视为离散时间排队的极限, 我们可以猜测在 Geo/Geo/1/SV 排队中, 均衡策略相关指标的结果应与本文 M/M/1/SV 排队中的对应结果相似. 事实上, 这一猜测是成立的, 在此由于篇幅限制, 对离散时间 Geo/Geo/1/SV 排队的均衡策略研究将在另一篇文章中具体展现. 今后, 我们还可以尝试探讨将各种休假策略引入到不同的排队经济学模型中, 拓宽顾客策略分析的研究领域, 丰富课题的研究成果.

参考文献

[1] Naor P. The regulation of queue size by levying tolls[J]. Economica, 1969, 37: 15–24.

[2] Edelson N M, Hildebrand D K. Congestion tolls for Possion queuing processes[J]. Econometrica, 1975, 43: 81–92.

[3] Hassin R, Haviv M. Equilibrium behavior in queueing systems: To queue or not to queue[M]. Dordrecht: Kluwer, 2003.

[4] Hassin R, Haviv M. Equilibrium threshold strategies: The case of queues with priorities[J]. Operations Research, 1997, 45(6): 966–973.

[5] Sun W, Guo P F, Tian N S. Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems with setup/closedown times[J]. Central European Journal of Operations Research, 2010, 18: 241–268.

[6] Jain A, Lim A E B, Shanthikumar J G. On the optimality of threshold control in queues with model uncertainty[J]. Queueing Systems, 2010, 65: 157–174.

[7] Burnetas A, Economou A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times[J]. Queueing Systems, 2007, 56: 213–228.

[8] Economou A, Kanta S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs[J]. Operations Research Letters, 2008, 36: 696–699.

[9] Guo P F, Sun W, Wang Y L. Equilibrium and optimal strategies to join a queue with partial information on service times[J]. European Journal of Operational Research, 2011, 214: 284–297.

[10] 孙微. 基于博弈论的排队经济学模型及策略分析 [D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2010: 113–119.
Sun W. Game-based models and strategy analysis for economics of queues[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2010: 113–119.

[11] Elaydi S N. An introduction to difference equations[M]. New York: Springer, 1999.