第39卷第8期 数学的实践与认识 Vol. 39 No. 8
2009年4月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY April, 2009

应 用

带有部分工作休假和休假中断的M/M/c排队

李继红[1], 李文焘[2], 田乃硕[3]

(1. 燕山大学 经济管理学院, 河北 秦皇岛 066004)
(2. 晋华学校 高中部, 山西 榆次 030600)
(3. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 考虑了一个带有部分工作休假和休假中断的多服务台M/M/c排队. 在休假期, $d(d<c)$个服务员以慢速继续服务新到顾客, 其余$c-d$个服务员进行正常休假. 同时, 引入另一种休假策略: 休假中断, 即当休假期服务员服务完一个顾客, 系统中至少有d个顾客, 则所有服务员中断休假返回正常工作期; 否则继续休假. 利用拟生灭过程和矩阵几何解方法, 得到了系统稳态下的队长分布; 同时, 表明了稳态队长和等待时间在服务员全忙条件下的条件随机分解结构.

关键词: 多服务台; 部分工作休假; 休假中断; 矩阵几何解; 条件随机分解

1 引 言

在过去的二十年中, 人们对休假排队系统进行了广泛研究, 理论分析主要集中于两类排队系统: 单服务台休假排队和多服务台休假排队. 对单服务台休假排队, 详细研究成果可见Takagi(1991), Doshi(1986), 田乃硕(2006). 与单服务台休假排队相比, 多服务台休假排队更适合模式实际情况. 田乃硕等(2006), 张哲和田乃硕(2003)进一步研究了部分服务员同步多重休假和单重休假排队, 在此系统中部分服务员休假, 剩余的服务员继续留在系统中服务顾客. 但他们只考虑了休假期内继续工作的服务员保持原来的工作速率. 实际上, 当处于休假期, 顾客一般相对较少, 服务员如果保持原来速率, 可能会造成资源浪费, 费用增加等损失. 本文就将考虑休假期内, 部分服务员以低速服务顾客, 其余休假, 我们称此策略为部分工作休假. 同时引入另外一种休假策略: 休假中断, 即休假期一次服务完成, 系统中若有一定数量顾客, 则所有服务员中断休假转回到正常工作水平. 在实际中, 服务机构和网络系统必须应对一些突发事件, 正在休假的服务员必须回到工作岗位而非继续休假.

本文将考虑带有此两种休假策略的M/M/c排队, 采用矩阵几何解的方法, 给出了稳态下队长分布, 并且建立了在服务员全忙条件下稳态队长和等待时间的条件随机分解.

2 模型分析

考虑经典M/M/c排队, 到达间隔和服务时间均服从指数分布, 到达率为λ, 服务率为μ_b. 当系统中无顾客时, 所有服务员开始一个任意长度同步休假, 休假时间V服从参数为θ的指数分布. 在休假期, $d(d<c)$个服务员继续以慢速μ_v服务新到顾客, 其余$c-d$个服务

收稿日期: 2006-09-28
基金项目: 国家自然科学基金(10671170); 燕山大学优秀博士生资助

员正常休假, 部分工作休假期是一个低速运营期. 同时休假期一次服务完成, 系统中若至少有 d 个顾客, 则所有服务员中断休假转回到正常工作水平, 工作速率由 μ_v 转到正常速率 μ_b. 否则, 继续部分工作休假. 同时, 当休假完成, 系统中若至少有 d 个顾客, 所有服务员也转回到正常工作水平; 否则, 开始另外一次休假. 这种排队模型称为带有部分工作休假和休假中断的 M/M/c 排队. 假设所有过程相互独立, 服务准则为先到先服务(FCFS).

令 $Q_v(t)$ 为时刻 t 系统中顾客数, 及 $J(t) = 1(0)$ 表示时刻 t 系统处于正常工作期(工作休假), 则 $\{Q_v(t), J(t)\}$ 是一个拟生灭过程(QBD), 状态集为 $\Omega = \{0, 0\} \cup \{(k, j): k \geq 1, j = 0, 1\}$. 其生成元可写成下列分块三对角形式:

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & C_0 & & & & & \\ B_1 & A_1 & C & & & & \\ & B_2 & A_2 & C & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} & \\ & & & & B & A & C \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

其中:

$$C_0 = (\lambda, 0), B_1 = (\mu_v, \mu_b)^{\mathrm{T}}, B_k = \begin{bmatrix} k\mu_v & 0 \\ 0 & k\mu_b \end{bmatrix}, 2 \leq k \leq d$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & d\mu_v \\ 0 & k\mu_b \end{bmatrix}, d + 1 \leq k \leq c, A_k = \begin{bmatrix} -(\lambda + k\mu_v) & 0 \\ 0 & -(\lambda + k\mu_b) \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq d$$

$$A_k = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + d\mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + k\mu_b) \end{bmatrix}, d + 1 \leq k \leq c$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & d\mu_v \\ 0 & c\mu_b \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + d\mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + c\mu_b) \end{bmatrix}$$

要分析此QBD 过程, 首先必须求解 $R^2B + RA + C = 0$ 的最小非负解率阵, 记为 R. 易得:

$$R = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda}{\lambda + \theta + d\mu_v} & \rho\dfrac{\lambda + \theta}{\lambda + \theta + d\mu_v} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \tag{1}$$

由Neuts(1981)的定理3.1.1, 很容易验证此QBD 过程是正常返的 $\Leftrightarrow \rho = \lambda(c\mu_b)^{-1} < 1$.

3 稳态队长分布

若 $\rho < 1$, 令 (Q_v, J) 为QBD 过程 $\{Q_v(t), J(t)\}$ 的稳态极限, 设

$$\pi_{kj} = P\{Q_v = k, J = j\} = \lim_{t \to \infty} P\{Q_v(t) = k, J(t) = j\}, \quad (k, j) \in \Omega$$

下面, 我们得到 (Q_v, J) 的稳态分布. 为方便, 我们引入下列记号:

$$\beta_{c0} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta + d\mu_v}\right)^{c-d}, \quad \delta = \sum_{j=0}^{d} j!\left(\frac{\mu_v}{\lambda}\right)^j$$

$$\beta_{c1} = \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu_b}\right)^c \sum_{j=0}^{d-1} j!\left(\frac{\mu_b}{\lambda}\right)^j + \frac{\lambda + \theta}{\lambda}\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu_b}\right)^{c-d}\left(\frac{\mu_v}{\lambda}\right)^{d} \sum_{j=d}^{c-1} j!\left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta + d\mu_v}\right)^j\right] \tag{2}$$

定理1　若 $\rho < 1$, (Q_v, J) 的稳态概率分布为:

$$
\pi_{k0} = \begin{cases} K\dfrac{1}{\delta}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_v}\right)^k \sum\limits_{j=k}^{d} j!\left(\dfrac{\mu_v}{\lambda}\right)^j, & 0 \le k \le d \\ K\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{k-d}, & d \le k \le c \\ K\beta_{c0}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{k-c}, & k \ge c \end{cases}
$$

$$
\pi_{k1} = \begin{cases} K\dfrac{1}{\delta}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_b}\right)^k \sum\limits_{j=0}^{k-1} j!\left(\dfrac{\mu_b}{\lambda}\right)^j, & 1 \le k \le d \\ K\dfrac{1}{\delta}\left[\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_b}\right)^k \sum\limits_{j=0}^{d-1} j!\left(\dfrac{\mu_b}{\lambda}\right)^j + \dfrac{\lambda+\theta}{\lambda}\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_b}\right)^{k-d} \right. & \\ \qquad \left. \cdot \sum\limits_{j=d}^{k-1}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{j+1-d}\right], & d \le k \le c \\ K\left[\beta_{c1}\rho^{k-c} + \beta_{c0}\rho\dfrac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta+d\mu_v}\sum\limits_{i=0}^{k-c-1}\rho^i\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{k-c-1-i}\right], & k \ge c \end{cases}
$$

K 可由正规化条件得到

证明　由Neuts 的矩阵几何解方法(见[6]), 我们可得:

$$\pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}) = (\pi_{c0}, \pi_{c1})R^{k-c}, \quad k \ge c \tag{3}$$

且 $(\pi_0, \pi_{10}, \pi_{11}, \cdots, \pi_{c0}, \pi_{c1})$ 满足等式: $(\pi_0, \pi_{10}, \pi_{11}, \cdots, \pi_{c0}, \pi_{c1})B[R] = 0$, 其中:

$$
B[R] = \begin{bmatrix} -\lambda & C_0 & & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & & \\ & B_2 & A_2 & C_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & B_{c-1} & A_{c-1} & C_{c-1} \\ & & & & B & A & RB + A \end{bmatrix}
$$

且:

$$
RB + A = \begin{bmatrix} -[\lambda+\theta+d\mu_v] & \lambda+\theta \\ 0 & -c\mu_b \end{bmatrix}
$$

替代 $B[R]$ 到上述等式, 我们可得一列等式:

$$
\begin{cases} -\lambda\pi_{00} + \mu_v\pi_{10} + \mu_b\pi_{11} = 0, \\ \lambda\pi_{k-1,0} - (\lambda + k\mu_v)\pi_{k0} + (k+1)\mu_v\pi_{k+1,0} = 0, \quad 1 \le k \le d-1, \\ -(\lambda+\mu_b)\pi_{11} + 2\mu_b\pi_{21} = 0, \\ \lambda\pi_{k-1,1} - (\lambda + k\mu_b)\pi_{k1} + (k+1)\mu_b\pi_{k+1,1} = 0, \quad 2 \le k \le d-1, \\ \lambda\pi_{d-1,0} - (\lambda + d\mu_v)\pi_{d0} = 0, \\ \lambda\pi_{d-1,1} + (\lambda + d\mu_b)\pi_{d1} + d\mu_v\pi_{d+1,0} + (d+1)\mu_b\pi_{d+1,1} = 0, \\ \lambda\pi_{k-1,0} - (\lambda+\theta+d\mu_v)\pi_{k0} = 0, \quad d+1 \le k \le c; \\ \lambda\pi_{k-1,1} + \theta\pi_{k0} - (\lambda + k\mu_b)\pi_{k1} + d\mu_v\pi_{k+1,0} + (k+1)\mu_b\pi_{k+1,1} = 0, \quad d+1 \le k \le c-1, \\ \lambda\pi_{c-1,1} + (\lambda+\theta)\pi_{c0} - c\mu_b\pi_{c1} = 0. \end{cases} \tag{4}
$$

记(4)中各等式为(4.1)～(4.9), 由(4.7)式, 得:

$$\pi_{k0}=\frac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\pi_{k-1,0}=\pi_{d0}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{k-d},\quad d\le k\le c$$

记 π_{00} 为常数, 由(4.2)式, 我们得,

$$\pi_{k0}=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu_v}\right)^k\left[\pi_{00}-\sum_{j=0}^{k-1}j!\left(\frac{\mu_v}{\lambda}\right)^j\pi_{d0}\right],\quad 0\le k\le d$$

令 $k=d$, 代入上述等式, 经过一些计算, 我们得到 π_{d0} 的表达式:

$$\pi_{d0}=\pi_{00}\left(\sum_{j=0}^{d}j!\left(\frac{\mu_v}{\lambda}\right)^j\right)^{-1}=\pi_{00}\delta^{-1}$$

把 π_{d0} 的表达式代入 π_{k0} 中, 很容易得到 π_{k0} 的表达式. 再由(4.1), 我们得: $\pi_{11}=\pi_{00}\lambda\mu_b^{-1}\delta^{-1}$. 从(4.8), (4.9)式, 我们容易得到表达式:

$$\pi_{k1}=\frac{d!}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu_b}\right)^{k-d}\left[\pi_{d1}+\pi_{00}\frac{\lambda+\theta}{\lambda}\frac{1}{\delta}\sum_{j=d}^{k-1}j!\left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{j+1-d}\right],\quad d+1\le k\le c\quad(5)$$

同时, 由等式(4.3), (4.4), 我们易得: $\pi_{k1}, 1\le k\le d$ 的表达式. 把 π_{d1} 代入(5)式, 我们很容易得到 π_{k1} 在 $1\le k\le c$ 的表达式. 因此, 有:

$$\begin{cases}\pi_{c0}=\pi_{00}\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{c-d}=\pi_{00}\beta_{c0}\\[2ex] \pi_{c1}=\pi_{00}\dfrac{1}{\delta}\left[\dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_b}\right)^c\displaystyle\sum_{j=0}^{d-1}j!\left(\dfrac{\mu_b}{\lambda}\right)^j+\dfrac{\lambda+\theta}{\lambda}\dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_b}\right)^{c-d}\sum_{j=d}^{c-1}j!\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}\right)^{j+1-d}\right]=\pi_{00}\beta_{c1}\end{cases}$$

把 (π_{c0},π_{c1}) 和 R^{k-c} 代入(3)式, 得 π_{kj} 在 $k\ge c$ 的分布. 由下列关系, 易得稳态队长分布:

$$P\{Q_v=0\}=\pi_{00},\quad P\{Q_v=k\}=\pi_{k0}+\pi_{k1},\quad k\ge 1.$$

3 条件随机分解结果

分析稳态队长的条件随机分解结构, 记 Q_c 为稳态下在服务员全忙条件下, 系统等待顾客数, 即

$$Q_c=\{Q_v-c\mid Q\ge c,J=1\}$$

定理2 若 $\rho<1$ 和 $\mu_b>\mu_v$, Q_c 可以分解为两个独立随机变量之和: $Q_c=Q_0+Q_d$, 其中 Q_0 为经典无休假 M/M/c 排队队长, 服从参数 $1-\rho$ 的几何分布; 附加队长 Q_d 服从修正的几何分布:

$$P\{Q_d=0\}=\frac{\beta_{c1}}{\delta},\quad P\{Q_d=k\}=\left(1-\frac{\beta_{c1}}{\delta}\right)(1-r)r^{k-1},\quad k\ge 1\qquad(6)$$

其中:

$$\delta=\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v},\quad r=\frac{\lambda}{\lambda+\theta+d\mu_v}$$

证明 首先, 我们易得所有服务员全忙的概率:

$$P\{Q_v\ge c,J=1\}=\sum_{k=c}^{\infty}\pi_{k1}=K\frac{1}{1-\rho}\left[\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}\right]=K\frac{\sigma}{1-\rho}\qquad(7)$$

则:

$$P\{Q_c=k\}=P\{Q_v=c+k\mid Q_v\ge c,J=1\}=\frac{\pi_{c+k,1}}{P\{Q_v\ge c,J=1\}}$$

$$=\frac{1-\rho}{\delta}\left[\beta_{c1}\rho^k+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta+d\mu_v}\sum_{j=0}^{k-1}\rho^j r^{k-1-j}\right]$$

可计算 Q_c 的概率母函数(PGF)为:

$$Q_c(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^kP\{Q_c=k\}=\frac{1-\rho}{\delta}\left[\beta_{c1}\sum_{k=0}^{\infty}(\rho z)^k+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta+d\mu_v}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\rho^j r^{j-1-j}z^k\right]$$

$$=\frac{1-\rho}{\delta}\left[\beta_{c1}\frac{1}{1-\rho z}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta+d\mu_v}\frac{z}{1-rz}\frac{1}{1-\rho z}\right]$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho z}\frac{1}{\delta}\left[\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}\frac{z(1-r)}{1-rz}\right]=Q_0(z)Q_d(z)$$

因此, 得到服务员全忙条件下系统等待顾客的随机分解结构.

式(6)说明附加队长可以写做两个独立随机变量的混合: $Q_d=\sigma_0X_0+\sigma_1X_1$, 其中 $\sigma_0=\beta_{c1}\delta^{1}$, $\sigma_1=1-\beta_{c1}\delta^{1}$, $X_0\equiv 0$, X_1 服从参数 $1-r$ 的几何分布.

由上述定理, 易得均值:

$$E(Q_d)=\sigma_1\frac{1}{1-r}=\frac{\beta_{c0}\rho\dfrac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}}{\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\dfrac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}}\frac{\lambda+\theta+d\mu_v}{\theta+d\mu_v},\quad E(Q_c)=\frac{\rho}{1-\rho}+E(Q_d)$$

考虑服务员全忙条件下, 顾客的条件等待时间及拉普拉斯变换(LST) $W^{(c)}$, $W_c^*(s)$.

定理 3　若 $\rho<1$ 和 $\mu_b>\mu_v$, 稳态等待时间 $W^{(c)}$ 可以分解成两个独立随机变量之和: $W^{(c)}=W_0^{(c)}+W_d$, 其中 $W_0^{(c)}$ 为经典无休假 M/M/c 排队的顾客等待时间, 服从参数 $c\mu_b(1-\rho)$ 的指数分布; 附加延迟 W_d 的 LST 为:

$$W_d^*(s)=\frac{1}{\delta}\left[\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}\frac{c\mu_b(1-r)}{s+c\mu_b(1-r)}\right]\tag{8}$$

证明　当服务员全忙, 新顾客到达, 若系统中有 k 个顾客, 则新顾客的等待时间 $W_k^{(c)}$ 服从参数为 $(c\mu_b, k-c+1)$ 的 Erlang 分布, 它的 LST 记为 $W_{ck}^*(s)$. 因此,

$$W_c^*(s)=\sum_{k=c}^{\infty}P\{Q_v=k|Q_v\geq c,J=1\}W_{ck}^*(s)$$

$$=\frac{1-\rho}{\delta}\sum_{k=c}^{\infty}\left[\beta_{c1}\rho^{k-c}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta+d\mu_v}\sum_{i=0}^{k-c-1}\rho^i r^{k-c-1-i}\right]\left(\frac{c\mu_b}{s+c\mu_b}\right)^{k-c+1}$$

$$=\frac{c\mu_b(1-\rho)}{s+c\mu_b(1-\rho)}\frac{1}{\delta}\left[\beta_{c1}+\beta_{c0}\rho\frac{\lambda+\theta}{\theta+d\mu_v}\frac{c\mu_b(1-r)}{s+c\mu_b(1-r)}\right]$$

同样, 等待时间的附加延迟和附加队长有类似的解释, 我们不详述. 由定理 3 中的条件随机分解结构, 易得条件等待时间的均值:

$$E(W_d)=\sigma_1\frac{1}{c\mu_b(1-r)}=\frac{1}{c\mu_b}E(Q_d),\quad E(W^{(c)})=\frac{1}{c\mu_b(1-\rho)}+E(W_d)$$

参考文献:

[1] Takagi H. Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation, Vol 1: Vacation and Priority Systems, Part 1[M]. Amsterdam: North-Holland Elsevier, 1991.

[2] Doshi B. Queueing systems with vacations-a survey[J]. Queueing Sys, 1986, 1(1): 29-66.

[3] Tian N, Zhang Z G. Vacation Queueing Models: Theory and Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 2006.

[4] Zhang Z G, Tian N. Analysis of queueing systems with synchronous single vacations for some servers[J].

Queueing Sys, 2003, 45(2): 161-175.
[5] Zhang Z G, Tian N. Analysis on queueing systems with synchronous vacations of partial servers[J]. Performance Evaluation, 2003, 52(2): 269-282.
[6] Neuts M. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.

The M/M/c Queue with Partial Working Vacations and Vacation Interruption

LI Ji-hong[1], LI Wen-tao[2], TIAN Nai-shuo[3]

(1. College of Economics and Management, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)
(2. Senior High, Jinhua School, Yuci 030600, China)
(3. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Consider a multi-server M/M/c queue with partial working vacations and vacation interruption. In such system, d servers keep on taking service at a lower rate in the vacation period, and the other $c-d$ servers go to the normal vacation. Meanwhile, we introduce another vacation policy: vacation interruption, i.e., when a service is completed in the vacation period, if there are at least d customers in the system, all servers will come back to the normal working level rather than keeping on the vacation; otherwise, they continue the vacation. Using quasi birth and death process and matrix-geometric solution method, we obtain the steady-state distribution for queue length. Furthermore, we indicate conditional stochastic decomposition structures for queue length and waiting time under the condition that all the servers are busy.

Keywords: multi-server; partial working vacations; vacation interruption; matrix-geometric solution; conditional stochastic decomposition