服务率可变的批服务排队网络

李继红，　田乃硕

(燕山大学 理学院，河北 秦皇岛 066004)

摘　要：大部分排队网络的研究结果是在服务率不变的条件下给出的。本文分析了两类成批服务的排队网络，并在服务率依赖于批服务大小的条件下，利用各节点的准可逆性，给出了不带信号和带消极信号的两类排队网络的乘积形式稳态解，并利用不动点原理，证明了交通方程解的存在性，并给出求法。

关键词：排队网络；乘积形式；准可逆性；不动点原理

中图分类号：O226；　　**文章标识码**：A　　**文章编号**：1007-3221(2006)01-0047-05

Queueing Networks with Batch Services and Changeable Service Rates

LI Ji-hong，TIAN Nai-shuo

(College of Science，Yanshan University，Qinhuangdao，066004，*China)*

Abstract：Most results of queuing networks are given in terms of constant service rates. In this article，the author considers two kinds of networks with batch services. With their service rates depending on the size of batch service，first，we give the product form stationary distributions for network without negative signals using the quasi-reversibility in each node. Then we show that the network with signals has the similar stationary distribution. And the fixed point theorem is used to verify whether there exists a solution to the traffic equations and also the solution to them is given.

Key words：queuing network；product form；quasi-reversibility；the fixed point theorem

0　引言

排队网络是由多个服务节点依照一定的转移规律所连接成的排队系统。通过把排队网络分解成各个节点研究，人们已经得到了很多网络的稳态分布，且大部分网络具有乘积形式解，即：稳态分布是各节点处分布的乘积形式。由这一特征，近几十年来，除Jackson提出的一些简单网络外，人们又分析了多种网络。Baskett Chandy Muntz 和 Palacios(BCMP)首次提出并给出了非指数服务时间的网络的稳态分布；Kelly(1979)进一步把BCMP网扩展到具有对称服务准则的网络，同样具有乘积形式分布；Chao 和 Pinedo(1993)引入了消极信号的排队网络，同样采用各节点处的准可逆性(定义见[1])，给出了稳态分布，进一步拓展了排队网络的研究范围；同时，Chao，Pinedo 和 Shaw(1996)分析了批服务排队网络，并对带有消极信号的批服务排队网络给出了乘积形式稳态解。但对服务率可变的网络研究得很少。

本文就将对服务率可变的批服务排队网络进行研究，即服务率依赖于批服务大小，利用各节点处的准可逆性，给出了一般情况和带消极信号两种情况下的稳态分布，同时进一步验证了这类网络同样具有乘积形式稳态解。

收稿日期：2005-04-15

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10271102)

作者简介：李继红(1982-)，女，硕士研究生；田乃硕(1941-)，男，教授，博士生导师

1 服务率依赖于批服务大小的网络(无信号)

1.1 模型假设

考虑有 N 个单服务台节点的网络,顾客从外界以参数为 λ_j 的 Poisson 过程到达节点 j 处,服务过程是成批的,批大小记为 B_j,概率分布函数为:

$$p\{B_j = n\} = b_j(n), n = 1, 2, \cdots, j = 1, \cdots, N \tag{1}$$

且每批大小为 n 时,服务时间为参数 $\mu_j(n)$ 的指数分布。若 j 处批大小为 B_j,则顾客到达 j 处,少于 B_j 个顾客,则立刻加入服务:否则等待,在服务完成时,j 处顾客数不少于 B_j 时,则 B_j 个顾客合成一个顾客,以概率 r_{jk} 到达节点 k 处,或以概率 r_{j0} 离开网络,显然:

$$\sum_{k=0}^{N} r_{jk} = 1, j = 1, \cdots, N$$

记外界为节点 0;当顾客少于 B_j 个时,所有顾客作为一个不完整的个体,以概率 1 离开网络。

令 α_j, β_j 分别为 j 处顾客总到达率和总离开率,在大部分网络中,前一个节点的离去往往作为后一个的到达(如串联排队),因此 j 处的到达分两部分:从外界到达和其他节点处离去再到 j 处,则满足交通方程:

$$\alpha_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{N} \beta_k r_{kj}, j = 1, \cdots, N \tag{2}$$

其中 α_j, β_j 待定,要分析此模型,先给出各节点处的稳态分布。

1.2 模型分析及稳态解

先考虑单个排队系统的稳态分布,由 Jackson 定理,在节点 j 处相当于是服务率依赖于批服务大小的 $M/M/1$ 排队,。此排队系统是 Markov 过程,则转移率为:

$$q(n, n+1) = \alpha, n \geq 0;$$
$$q(n, n-1) = \mu(l) b(l), n > l \geq 1$$
$$q(n, 0) = \sum_{l=n}^{+\infty} \mu(l) b(l), n \geq 1$$

引理 1.2.1 服务率依赖于批大小的 $M/M/1$ 排队的稳态分布:

$$\pi(n) = 1(1-\rho)\rho^n \qquad n = 0, 1, \cdots$$

其中 ρ 为下述等式的解:

$$\alpha = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) \tag{3}$$

且 $\rho < 1$,同时当 $\sum_{n=1}^{+\infty} nb(n)\mu(n) > \alpha$ 时,此等式在 $(0,1)$ 内有唯一解。

证明 此过程的平衡方程为:

$$\pi(n)\left[\alpha + \sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l)\right] = \alpha\pi(n-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} \pi(n+l) b(l)\mu(l), n \geq 1 \tag{4}$$

$$\alpha\pi(0) = \sum_{l=1}^{+\infty} \pi(l) q(l, 0) = \sum_{l=1}^{+\infty} \pi(l) \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) \tag{5}$$

若稳态分布为 $\pi(n) = C\rho^n$:,则代入上两式得:

$$\alpha + \sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) = \frac{\alpha}{\rho} + \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l b(l)\mu(l) \tag{6}$$

$$\alpha = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) \tag{7}$$

可以验证这两式是等价的:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) - \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l b(l)\mu(l) \\
= &\sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) + \sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) - \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l b(l)\mu(l) \\
= &\sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) \sum_{n=1}^{l} \rho^n + \sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) - \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l b(l)\mu(l) \\
= &\sum_{l=1}^{+\infty} b(l)\mu(l) \sum_{n=1}^{l} \rho^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^{n-1} \sum_{l=n}^{+\infty} b(l)\mu(l) = \frac{\alpha}{\rho}
\end{aligned}$$

而 C 由标准化条件可得:$C = 1 - \rho$, 因此若 ρ 满足(7) ,$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n$

且令:
$$f(\rho) = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) - \alpha$$
则 $f(0) = -\alpha, f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nb(n)\mu(n) - \alpha$,且 $f(\rho)$ 为递增函数,则当:
$\sum_{n=1}^{+\infty} nb(n)\mu(n) > \alpha$ 时,$\alpha = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n)$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一解。　证毕。

回到原网络中,令 e_j 为 j 位置为 1,其余位置为 0 的向量,n_j 为 j 处顾客数,网络状态为:
$$(n) = (n_1, n_2, \cdots, n_N)$$

定理 1.2.2　若交通方程:
$$\alpha_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_k^l \mu_k(l) b_k(l) r_{kj}, j = 1, \cdots, N \tag{8}$$
有解 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$,且 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N)$ 满足:
$$\alpha_j = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \sum_{n=l}^{+\infty} \mu_j(n) b_j(n), j = 1, \cdots, N \tag{9}$$
且 $\rho_j < 1$,则网络的稳态分布是:
$$\pi(n) = \prod_{j=1}^{N} \pi_j(n_j), \pi_j(n_j) = (1 - \rho_j)\rho_j^{n_j}$$

证明　由[1]中定理,稳态分布要有乘积形式,只要各节点处准可逆即可,因此在 j 处:
$$q_j^A(n_j, n_j + 1) = \alpha_j, n_j \geq 0;$$
$$q_j^D(n_j + l, n_j) = \mu_j(l) b_j(l), n_j \geq 0;$$
$$q_j^I(n_j, 0) = \sum_{l=n_j+1}^{+\infty} \mu_j(l) b_j(l)$$

由引理 1.2.1,稳态分布为,其 $\pi_j(n_j) = (1 - \rho_j)\rho_j^{n_j}$,其中 ρ_j 满足(1.2.7)式,则:
$$\sum_{n'_j} \pi_j(n'_j) q_j^D(n'_j, n_j) = \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_j(n_j + l)\mu_j(l) b_j(l) = \pi_j(n_j) \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \mu_j(l) b_j(l)$$
令 $\beta_j = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \mu_j(l) b_j(l)$,则说明节点 j 处是准可逆的。把 β_j 的表达式代入(1),可得(1.2.6),只要 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ 为(8)的解,且 $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_N)$ 由(9)决定,则网络分布为乘积形式。　证毕。

注:在各节点处的到达包含外界到达和其他节点处的到达,所以一般网络中各节点的到达过程非 Poisson 的,但 Jackson 定理和 Kelly 引理已经说明在开排队网络和闭网络中,若只考虑稳态分布可以以 Poisson 到达处理。

2　带消极信号且服务率依赖于批服务大小的网络

2.1　模型假设

顾客到达与服务如 1.1 节所述,同时存在一类消极信号到达,记为 s^-,且以参数 λ_j^- 的 Poisson 过程到达 j 处,$j = 1, \cdots, N$,同时一批顾客服务完成,若 j 处顾客数多于 B_j,则 B_j 个顾客合成一个个体,以概率 $r_{jc,kc}$ 作为一个顾客到达 k 处,以概率 r_{jc,ks^-} 作为信号到达 k 处,。以概率 $r_{jc,0}$ 离开系统,则必有:
$$\sum_{k=1}^{N} r_{jc,kc} + \sum_{k=1}^{N} r_{jc,ks^-} + r_{jc,0} = 1, j = 1, \cdots, N \tag{10}$$
若服务完 j 处顾客数少于 B_j,则所有顾客合成一个个体,以概率 1 离开系统。当信号到达时,引起 j 处 A_j^- 个顾客转移,其中 A_j^- 的分布函数为:
$$p\{A_j^- = l\} = a_j^-(l), l = 1, 2, \cdots \tag{11}$$
信号到 j 处时,至少有 A_j^- 个顾客时,A_j^- 个顾客作为一个个体立刻离开,且以概率 $r_{js^-,kc}$ 作为信号到达 k 处,或以概率 r_{js^-,ks^-} 作为信号到达 k 处,以概率 $r_{js^-,0}$ 离开网络,则有:
$$\sum_{k=1}^{N} r_{js^-,kc} + \sum_{k=1}^{N} r_{js^-,kc} + r_{js^-,0} = 1, j = 1, \cdots, N \tag{12}$$
若 j 处顾客数少于 A_j^- 个时,j 处所有顾客以概率 1 离开网络。

设 $\alpha_j, j = 1, \cdots, N$ 为 j 处顾客总的到达率,α_j^- 为信号到 j 处的总到达率,β_j, β_j^- 分别为顾客服务完成离开和信号引起顾客离开的速率,则交通方程为:

$$\alpha_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{N} \beta_k r_{kc,jc} + \sum_{k=1}^{N} \beta_k^- r_{ks^-,jc},\ j = 1,\cdots,N \tag{13}$$

$$\alpha_j^- = \lambda_j^- + \sum_{k=1}^{N} \beta_k r_{kc,js^-} + \sum_{k=1}^{N} \beta_k^- r_{ks^-,js^-},\ j = 1,\cdots,N \tag{14}$$

其中 $\alpha_j,\alpha_j^-,\beta_j,\beta_j^-,\ j = 1,\cdots,N$ 待定。

2.2 模型稳态解

设网络状态为：$n = (n_1, n_2, \cdots, n_N)$

引理 2.2.1 服务率依赖于批大小，且带消极信号的批服务 $M/M/1$ 的稳态分布是：

$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n,\ n = 0,1,\cdots$$

其中 ρ 为下等式的解：

$$\alpha = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} b(n)\mu(n) + \alpha^- \sum_{l=1}^{+\infty} \rho^l \sum_{n=l}^{+\infty} a^-(n) \tag{15}$$

且 $\rho < 1$，当：$\sum_{n=1}^{+\infty} nb(n)\mu(n) + \alpha^- > \alpha$ 时，上式在 $(0,1)$ 内有解。α,α^- 分别为顾客和信号的到达率。

定理 2.2.2 若交通方程：

$$\alpha_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{u=1}^{+\infty} \rho_k^u b_k(u)\mu_k(u)\right) r_{kc,jc} + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k^- A_k(\rho_k))\, r_{ks^-,jc} \tag{16}$$

$$\alpha_j^- = \lambda_j^- + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{u=1}^{+\infty} \rho_k^u b_k(u)\mu_k(u)\right) r_{kc,js^-} + \sum_{k=1}^{N} (\alpha_k^- A_k(\rho_k))\, r_{ks^-,js^-} \tag{17}$$

有解 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$，$(\alpha^-,\cdots,\alpha_N^-)$，且 ρ_j 为下式在 $(0,1)$ 内的解：

$$\alpha_j = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \sum_{n=l}^{+\infty} b_j(n)\mu_j(n) + \alpha_j^- \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \sum_{n=l}^{+\infty} a_j^-(n) \tag{18}$$

则网络的稳态分布为：

$$\pi(n) = \prod_{j=1}^{N} \pi_j(n_j),\ \pi_j(n_j) = (1-\rho_j)\rho_j^N,\ j = 1,\cdots,N$$

其中：
$$A_j(z) = \sum_{n=l}^{+\infty} z^n a_j^-(n) \quad j = 1,\cdots,N$$

证明 如定理 1.3.1 证明，只要说明 j 处准可逆即可。在 j 处，把顾客到达看作 c 类，引起 u 个顾客离开的信号看作 u^- 类，$u = 1,2,\cdots$。显然 j 处一个消极信号的到达称为 u^- 类的概率为 $a_j^-(n)$，$u = 1,2\cdots$，同时，把整批 B_j 个顾客服务完成看作 c 类离去，信号引起的整批 A_j^- 个离去看作 s^- 类离去，则有：

$$q_{jc}^A(n_j, n_j+1) = \alpha_j,\ n_j \ge 0;$$

$$q_{ju^-}^A(n_j+u, n_j) = \alpha_j^- a_j^-(u),\ u = 1,2,\cdots,n_j \ge 0$$

$$q_{ju^-}^I(n_j,0) = \alpha_j^- a_j^-(u),\ u > n_j = 1,2,\cdots$$

$$q_{jc}^D(n_j+u, n_j) = \mu_j(u)\, b_j(u),\ n_j \ge 0,\ u = 1,2,\cdots;$$

$$q_j^I(n_j,0) = \sum_{u=n_j+1}^{+\infty} \mu_j(u)\, b_j(u),\ n_j \ge 1;$$

$$f_{ju^-,s^-}(n_j+u, n_j) = 1,$$

最后一式表示：u^- 类到达使状态由 $n_j + u$ 变到 n_j，且立刻引起 s^- 类离去的概率，相当于把信号引起的离去看作 s^- 类离去。则只考虑 j 处稳态分布，则：

$$\pi_j(n_j) = (1-\rho_j)\rho_j^n,\ n = 0,1\cdots,\ j = 1,\cdots,N$$

因为
$$\sum_{n_j'} \pi_j(n_j')\, q_{jc}^D(n_j', n_j) = \sum_{u=1}^{+\infty} \pi_j(n_j+u)\, q_{jc}^D(n_j+u, n_j) = \pi_j(n_j) \sum_{u=1}^{+\infty} \rho_j^u \mu_j(u)\, b_j(u)$$

且
$$\sum_{n_j'} \pi_j(n_j')\left[q_{js^-}^D(n_j', n_j) + \sum_{u=1}^{+\infty} q_{ju^-}^A(n_j'+n_j)\, f_{ju^-,s^-}(n_j', n_j)\right]$$

$$= \sum_{u=1}^{+\infty} \pi_j(n_j+u)\,\alpha_j^- a_j^-(u) = \pi_j(n_j)\,\alpha_j^- \sum_{u=1}^{+\infty} \rho_j^u a_j^-(u) = \pi_j(n_j)\,\alpha_j^- A_j(\rho_j)$$

所以令：$\beta_j = \sum_{u=1}^{+\infty} \rho_j^u \mu_j(u)\, b_j(u)$，$\beta_j^- = \alpha_j^- A_j(\rho_j)$ 时，j 处是准可逆的；再把 β_j,β_j^- 代入 (13) 和 (14)，即可得到 (16)，(17)，若有解，则结论成立。 证毕。

3 交通方程解的存在性及求法

前两节验证了稳态分布的存在性，在验证过程中，关键一步是方程 (8)，(16)，(17) 解的存在性及求法。

若经过运算得 $\beta_j = \alpha_j, \beta_j^- = \alpha_j^-$,则交通方程成为线性方程组,,此时求解较易,而对于非线性的求解,成果较少。在此,利用不动点原理给出网络的交通方程解的存在及求法。

先讨论(1.3.1),它实际上为形式 $\alpha_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{N} \beta_k(\alpha) r_{kj}, j = 1, \cdots, N$ 的特殊形式,因此以其讨论。若分别以向量 α, β, λ 记平均到达率,离开率和从外界到达率, R 记转移率阵,则方程形式为:

$$\alpha = \lambda + \beta(\alpha) R \tag{19}$$

(1)解此方程利用不动点原理,用递推: $\alpha^{(n)} = \lambda\beta - (\alpha^{(n-1)}) R$,当 $\alpha^{(n)}$ 收敛,则极限点为所求解。

(2)对解的存在性问题有以下定理:

定理 3.1　若下两个条件满足:(i) $\beta(\alpha) R$ 对 α 非减;(ii) $\beta(\alpha)$ 对连续;

则方程(19)有极小非负解,即为递推式的极限解。

证明　令 α^* 为(19)的任意解,因为 $\alpha^{(0)} \le \alpha^{(1)}, \alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)} = (\beta(\alpha^{(n)}) - \beta(\alpha^{(n-1)})) R$

由假设(i)说明: $\alpha^{(n)}$ 为非减序列,而: $0 = \alpha^{(0)} \le \alpha^*$,说明: $\alpha^{(1)} = \lambda + \beta(\alpha^{(0)}) \le \lambda + \beta(\alpha^*) = \alpha^*$,依此类推: $\alpha^{(n)} \le \alpha^*$ 从而说明 $\alpha^{(n)}$ 为非减序列且有上界 α^* ,因此必有极限,令 α 为此极限,由假设(ii)说明 α 必满足(19),且为极小解。　证毕。

从而对于方程 18,由网络假设, ρ_j 为 α_j 的非减函数,且因为 $\beta_j(\alpha) = \sum_{l=1}^{+\infty} \rho_j^l \mu_j(l) b_j(l)$,则 $\beta_j(\alpha)$ 亦为 α 的非减函数,且 $\beta_j(\alpha)$ 显然对 α 连续,则(8),(9)必存在解,则定理 1.3.1 的结论也必成立。而对其它方程组讨论类似。

4　结束语

上述给出的两类服务率可变的排队网络,若令 $\mu_j(n_j) = \mu_j$,即与批大小无关时,结论同[1]中结果相同。这类排队网络的建模与分析进一步扩展了排队网络的应用范围,可以很好的应用于制造系统中的成批加工以及质量检测,同时也可以利用本文结果进行优化某些服务系统,具有很大的应用价值,也进一步拓宽了研究范围,采用同样方法可以对多服务台,一般服务时间的排队网络进行分析,有很大的理论价值。

参考文献:

[1] Chao X, Miyazawa M, Pinedo M. Queueing networks[M]. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[2] Chao X, Pinedo M. Networks of queues with batch services, singals and productform solution[J]. Operations Research Letters, 1995, (17): 237-242.

[3] Chandy K M, Martin J. A characterization of product form queueing networks[J]. Journal of the ACM, 1983, (24): 250-263.

[4] 劳斯,随机过程[M].何声武译,中国统计出版社,1997.

[5] Herderson W, Northcote B. Taylor P G. Geometric equilibrium distributions for queues with interactive batch departures[J]. Annals of Operations Research 1994, (48): 493-511.

[6] Chao X, Zheng S. A result on networks of queues with customer coalescence and state-dependent signaling[J]. Journal of Applied Probability, 1998, (35): 151-164.