燕山大学学报
Journal of Yanshan University
Vol. 32 No. 3
May 2008

文章编号：1007-791X (2008) 03-0273-05

具有N个有限容量服务节点和消极信号的排队网络

李继红[1]，田乃硕[2]

（1. 燕山大学 经济管理学院，河北 秦皇岛 066004；2. 燕山大学 理学院，河北 秦皇岛 066004）

摘 要：分析了在一般服务准则下，具有多类型顾客与消极信号的排队网络，并且加入了有限容量的限制，利用各节点处的拟可逆性，给出了在一种特殊转移下，系统的乘积形式稳态分布。采用拟可逆性，利用逆推验证了稳态分布的形式，具有较大的应用价值。

关键词：有限容量；消极信号；拟可逆性；乘积形式

中图分类号：O226　　**文献标识码**：A

0 引言

排队网络是当今排队论研究的热点，也是研究计算机通讯网络与制造系统性能的一种有效方法。近几十年来，人们对排队网络做了大量的研究，分析了很多网络，采用很多方法给出了网络的稳态指标。Jackson 利用逆过程的方法，分析了现在称之为 Jackson 网络的稳态分布，并给出了理论证明，从而提出了乘积形式稳态解这一思想，成为后人研究的基础；Chao 和 Pinedo (1993) 把这些结果延伸到带消极信号的排队网络中，并且使各节点处服务准则一般化，同样给出了系统的稳态分布，进一步拓展了排队网络的应用范围。

本文将对带消极信号的一般网络进行分析，同时加入了有限容量：即各节点处顾客最大容量有限，以及一般服务准则。利用各节点处的拟可逆性，给出了网络的稳态分布，并以一个简单例子对其进行了验证。

为便于以下分析，先给出本文要用到的定义及定理：

定义 1（带信号排队的拟可逆性）　若存在两个非负集$\{\alpha_u,\ u\in T\}$，$\{\beta_u,\ u\in T\}$满足

$$\sum_{x\in S} q_u^A(x,\ x')=\alpha_u,\ x\in S,\ u\in T,$$

$$\sum_{x\in S}\pi(x')\left(q_u^D(x',\ x)+\sum_{v\in T}q_u^A(x',\ x)f_{v,\,u}(x',\ x)\right)=$$

$$\beta_u\pi(x),\ x\in S,\ u\in T \tag{1}$$

则称此排队相对于$\{q_u^A,\ f_{u,\,v},\ u\in T,\ v\in T\}$,$\{q_u^D,\ u\in T\}$和$q^I$是拟可逆的，其中$\pi(x)$为排队系统的稳态分布，且$q_u^A$为$u$类到达所引起的转移的转移率，$q_u^D$是$u$类离去所引起转移的转移率。

定理 1　若带信号的每个节点处对于总到达率是拟可逆的，则排队网络有乘积形式稳态分布

$$\pi(x)=\prod_{j=1}^{N}\pi_j(x_j),\ x\equiv(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\in S$$

通过上述定义和定理，可以解决本文网络的稳态分布问题。

1 模型假设

考虑有N个服务节点的排队网络，每个节点仅有一个服务台，节点$j(j=1,\ 2,\ \cdots N)$的最大容量为k_j，有I类顾客和一类信号，从外界分别以参数λ_{ju}，λ_j^-的 Poisson 过程来到节点j处，u为顾客到达类的记号，当u类顾客到达j节点时，顾客数少于k_j，此顾客加入节点j处；信号到j时，至少有一名顾客，则减少j处一个顾客，为具体此模型，做如下假设：

收稿日期：2008-03-25　　**基金项目**：国家自然科学基金资助项目（10671170）

作者简介：李继红（1982- ），女，山西榆次人。博士研究生。主要研究方向为排队论及其应用。

1）u类顾客接受服务完成，发生转移，称为u类离去；u类顾客由于信号而导致离去，称为u^-类离去，若信号到达记为s，则j处到达类有I+1种，离去类有$2I$种，类集为

$$T_j=\{u;\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ I\}\cup\{c^-\}\cup\{u^-;\ u^-=1,\ 2,\ \cdots,\ I\}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots N$$

2）u类顾客在节点j处具有指数服务率μ_{ju}，但服务员不一定仅同时服务一个顾客，可能以某种准则，同时服务多个顾客，如共用加工系统。因此，考虑一般情况，设节点j最多有k_j个服务位置，记为1，2，…，k_j；当顾客到达节点j时，若有n_j个顾客，$n_j\le k_j-1$，则以概率$\delta_j^A(l,\ n_j+1)$占据l位置，l=1，2，…，n_j+1，而此前处于l，l+1，…，n_j位置的顾客分别移到l+1，l+2，…，n_j+1的位置，显然，$\sum_{l=1}^{n_j+1}\delta_j^A(l,\ n_j+1)=1$，$n_j+1\le k_j$；同时$l$位置的顾客以占总服务率$\delta_j^D(l,\ n_j)$的比率接受服务，服务完成，$l$+1，…，$n_j$位置顾客分别转移到$l$，…，$n_j-1$位置，显然$\sum_{l=1}^{n_j}\delta_j^D(l,\ n_j)=1$，$n_j\le k_j$；

3）在节点j处，服务完的顾客以概率$r_{ju,\ kv}$或$r_{ju,\ ks^-}$作为v类顾客或信号到达k节点处，以概率$r_{ju,\ 0}$离开系统，永不再来，显然

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}r_{ju,\ kv}+\sum_{k=1}^{N}r_{ju,\ ks^-}+r_{ju,\ 0}=1 \tag{2}$$

由信号到达引起离开的顾客，以概率$r_{ju^-,\ kv}$或$r_{ju^-,\ ks^-}$作为一般顾客或信号到达k处，以概率$r_{ju^-,\ 0}$离开系统，永不再来，显然$r_{ju^-,\ kv}$，$r_{ju^-,\ ks^-}$，$r_{ju^-,\ 0}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}r_{ju^-,\ kv}+\sum_{k=1}^{N}r_{ju^-,\ ks^-}+r_{ju^-,\ 0}=1 \tag{3}$$

当u类顾客到达j处时，有k_j个顾客，则以概率$(f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)r_{ju,\ kv}+f_{ju,\ u^-}(k_j,\ k_j)r_{ju^-,\ kv})$作为$v$类顾客到达$k$处，或以概率$(f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)r_{ju,\ ks^-}+f_{ju,\ u^-}(k_j,\ k_j)r_{ju^-,\ ks^-})$作为信号到达$k$处，其中$f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)$为此类顾客到达$j$处时，作为$u$类立刻离去的概率；$f_{ju,\ u^-}(k_j,\ k_j)$为作为$u^-$类离去的概率，显然：$f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)+f_{ju,\ u^-}(k_j,\ k_j)=1$。

4）当信号到达j处时，引起l位置的顾客离开的概率是$\eta_j(l,\ n_j)$，若j处有n_j个顾客时，l=1，2，…，n_j；则有：$\sum_{l=1}^{n_j}\eta_j(l,\ n_j)=1$。

上述模型实质上包含了常见的排队系统，只要对节点j处的$\delta_j^A(l,\ n_j+1)$，$\delta_j^D(l,\ n_j)$，和$\eta_j(l,\ n_j)$具体化即可，用一个简单的例子来说明这种效果。

例 1 若节点j定义为

$$\delta_j^A(l,\ n_j+1)=\begin{cases}1 & l=n_j+1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\delta_j^D(l,\ n_j)=\begin{cases}1 & l=1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

$$\eta_j(l,\ n_j)=\begin{cases}1 & l=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中，$[x]$是x的整数部分，则节点处的运行相当于是顾客按 FCFS 服务的单服务台，信号的到达使得排队的中间顾客离去。

2 模型分析与乘积形式解

令n_{ju}为稳态下节点j处u类顾客的个数，j=1，2，…，N，u=1，2，…，I，则令向量

$$\boldsymbol{n}_j=(n_{j1},\ n_{j2},\ \cdots,\ n_{jI})$$

则稳态下网络的状态表示为

$$\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{n}_N)$$

显然：$n_j=\sum_{u=1}^{I}n_{ju}$，j=1，2…，N，称为节点j处的顾客数，且满足$n_j\le k_j$。

同时，为方便分析网络，引入另一个状态：令$c_j(l)$为节点j处处于l位置的顾客类，令

$$\boldsymbol{c}_j=(c_j(1),\ c_j(2),\ \cdots,\ c_j(n_j))$$

则网络的状态可表示为

$$\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_N)$$

令α_{ju}为节点j处u类顾客总的到达率，α_j^-为信号的平均总到达率，设β_{ju}为j处u类顾客总的离开率，β_{ju^-}为u^-类顾客的总的平均离开率。则满足下列平衡方程

$$\alpha_{ju}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{v\in T_s}\beta_{kv}r_{kv,\ ju}=\lambda_{ju}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}\beta_{kv}r_{kv,\ ju}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}\beta_{kv^-}r_{kv^-,\ ju} \tag{4}$$

$$\alpha_j^-=\sum_{k=0}^{N}\sum_{v\in T_s}\beta_{kv}r_{kv,\ js^-}=\lambda_j^-+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}\beta_{kv}r_{kv,\ js^-}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{I}\beta_{kv^-}r_{kv^-,\ js^-} \quad (5)$$

定理 2　假设下面条件中至少有一个满足：

a）μ_{ju}与顾客类型相独立；

b）$\delta_j^A(l,\ n_j)=\delta_j^D(l,\ n_j)$，对所有$l$=1，2，…，$n_j$均成立，称为对称服务准则。

则上述网络的稳态分布为

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{c})=\prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j) \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)=b_j^{-1}\prod_{l=1}^{n_j}\rho_{jc_j(l)} \quad (7)$$

且$\rho_{ju}=\dfrac{\alpha_{ju}}{\alpha_j^-+\mu_{ju}}$，$b_j=\sum_{n_j=0}^{k_j}\rho_j^{n_j}$，$j$=1，2，…，$N$。

证明　由定理 1，需要验证每个节点，独立成排队时具有可逆性。对于节点j，转移率为

$$q_j(c_j,\ c_j')=\sum_{u=1}^{I}\alpha_{ju}p_{ju}^A(c_j,\ c_j')+\alpha_j^-p_{js^-}^A(c_j,\ c_j')+$$

$$\sum_{l=1}^{n_j}q_{jc_j(l)}^D(c_j,\ c_j') \quad (8)$$

此时，可以看作u类顾客以α_{ju}速率的 Poisson 过程到达，信号以α_j^-的速率的 Poisson 过程到达，此节点的运行准则由δ_j^A，δ_j^D和η_j决定，定义

$$\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l=(c_j(1),\ \cdots,\ c_j(l-1),\ c_j(l+1),\cdots,\ c_j(n_j))$$

$$l\le n_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

表示$c_j(l)$类顾客离开节点后的状态；则由一般服务完成所引起的此类事件的转移率为

$$q_{jc_j(l)}^D(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)=\mu_{jc_j(l)}\delta_j^D(l,\ n_j) \quad (9)$$

由信号到达所引起的此类状态改变的概率函数为

$$p_{js^-}^A(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)=\eta_j(l,\ n_j) \quad (10)$$

类似，定义⊕为：

$$\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u)=(c_j(1),\ \cdots,\ c_j(m-1),\ u,\ c_j(m),\ \cdots,\ c_j(n_j))$$

为u类顾客到达位置m后，引起的状态改变，此到达效果的概率函数为

$$p_{ju}^A(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))=\delta_j^A(m,\ n_j+1),$$

$$m=1,\ 2,\ \cdots,n_j+1,\ n_j+1\le k_j \quad (11)$$

且当$n_j=k_j$时，u顾客到达不引起状态改变，所以

$$p_{ju}^A(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j)=1,\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ I,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

所以，j处排队的转移率为

$$q_j(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)=q_{jc_j(l)}^D(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)+\alpha_j^-p_{js^-}^A(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)=$$

$$\mu_{jc_j(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)+\alpha_j^-\eta_j(l,\ n_j),\ n_j\le k_j \quad (12)$$

$$q_j(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))=\alpha_{ju}\delta_j^A(m,\ n_j+1),\ n_j+1\le k_j \quad (13)$$

$$q_j(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j)=\sum_{u=1}^{I}\alpha_{ju},\ n_j=k_j \quad (14)$$

考虑j处排队的逆过程，假设时间可逆过程是到达率为α_{ju}，服务率为$\alpha_j^-+\mu_{ju}$的另一排队，因为在逆时间下到达与离去发生转化，则逆过程中处于m位置的顾客离开率为

$$\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u),\boldsymbol{c}_j)=(\alpha_j^-+\mu_{ju})\delta_j^A(m,\ n_j+1),$$

$$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j+1 \quad (15)$$

且逆过程中当状态为$\boldsymbol{c}_j$时，u类顾客到达选择位置的概率，相当于向前过程中u类顾客从l位置离开的概率

$$\frac{\alpha_j^-\eta_j(l,\ n_j)+\mu_{jc_j(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)}{\alpha_j^-+\mu_{jc_j(l)}},\ \boldsymbol{c}_j(l)=u$$

因此逆过程中到达引起的转移率为

$$\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l,\boldsymbol{c}_j)=\alpha_{jc_j(l)}\frac{\alpha_j^-\eta_j(l,\ n_j)+\mu_{jc_j(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)}{\alpha_j^-+\mu_{jc_j(l)}},\ n_j\le k_j \quad (16)$$

$$\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_l(u),\boldsymbol{c}_j)=\alpha_{ju}\frac{\alpha_j^-\eta_j(l,\ n_j)+\mu_{ju}\delta_j^D(l,\ n_j)}{\alpha_j^-+\mu_{ju}},\ n_j+1\le k_j \quad (17)$$

$$\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=\sum_{u=1}^{I}\alpha_{ju},\ n_j=k_j \quad (18)$$

第一步：验证式 (6) 是由 式 (7) 所定义的排队系统的稳态分布。由 Kelly 引理得

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)=b_j^{-1}\prod_{l=1}^{n_j}\rho_{jc(l)}(\mu_{jc(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)+\alpha_j^- n_j(l,\ n_j))=$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)\alpha_{jc(l)}\frac{\alpha_j^- n_j(l,\ n_j)+\mu_{jc(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)}{\alpha_j^-+\mu_{jc(l)}}=$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l)\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j\ominus\boldsymbol{e}_l,\boldsymbol{c}_j),\ n_j\le k_j \tag{19}$$

同理

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))=$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u),\boldsymbol{c}_j)\ ,\ n_j+1\le k_j \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j),\ n_j=k_j \tag{21}$$

且

$$\sum_{c_j}q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j')=\sum_{l=1}^{n_j}q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\Theta\boldsymbol{e}_l)+\sum_{u=1}^{I}q_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))=$$

$$\sum_{u=1}^{I}\alpha_{ju}+\sum_{l=1}^{n_j}\mu_{jc(l)}\delta_j^D(l,\ n_j)+\alpha_j^- 1[n_j\ge 1],\ n_j+1\le k_j \tag{22}$$

其中

$$1[n_j\ge 1]=\begin{cases}1,\ n_j\ge 1\\ 0,\ 其它\end{cases}$$

同理

$$\sum_{c_j'}\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j')=\sum_{u=1}^{I}\alpha_{ju}+\sum_{l=1}^{n_j}\mu_{jc(l)}\delta_j^A(l,\ n_j)+$$

$$\alpha_j^- 1[n_j\ge 1],\ n_j+1\le k_j \tag{23}$$

由条件 a）或 b）可得：

$$\sum_{c_j}q_j(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j')=\sum_{c_j'}\bar{q}_j(\boldsymbol{c}_j,\ \boldsymbol{c}_j'),\ n_j+1\le k_j$$

同样可以验证当$n_j=k_j$时，上式也成立，因此$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)$为式 (7) 所定义排队的稳态分布。

第二步：验证节点的拟可逆性：假设

$$f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)=\frac{\mu_{ju}}{\mu_{ju}+\alpha_j^-},f_{ju,\ u}^-(k_j,\ k_j)=\frac{\alpha_j^-}{\mu_{ju}+\alpha_j^-},j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

则消极信号引起离开的概率为

$$f_{js^-,\ u^-}(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_{jl}(u),\boldsymbol{c}_j)=1,\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ I,\ n_j+1\le k_j$$

显然，$f_{ju,\ u}(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=f_{ju,\ u}(k_j,\ k_j)$, $f_{ju,\ u}^-(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=f_{ju,\ u}^-(k_j,\ k_j)$。则由式 (9)、(10) 可得

$$\sum_{c_j'}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j')q_{ju}^D(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j')=\sum_{l=1}^{n_j+1}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_m(u))q_{ju}^D(\boldsymbol{c}_j\oplus\boldsymbol{e}_{jl}(u),\boldsymbol{c}_j)=$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)\alpha_{ju}\frac{\mu_{ju}}{\mu_{ju}+\alpha_j^-},\ n_j+1\le k_j$$

同理

$$\sum_{c_j'}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j')q_{js^-}^A(\boldsymbol{c}_j',\boldsymbol{c}_j)f_{js^-,\ u^-}(\boldsymbol{c}_j',\boldsymbol{c}_j)=$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)\alpha_{ju}\frac{\alpha_j^-}{\mu_{ju}+\alpha_j^-},\ n_j+1\le k_j$$

当$n_j=k_j$时

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)q_{ju}^A(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)f_{ju,\ u}(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)\alpha_{ju}\frac{\mu_{ju}}{\mu_{ju}+\alpha_j^-}$$

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)q_{ju}^A(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)f_{ju,\ u^-}(\boldsymbol{c}_j,\boldsymbol{c}_j)=\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)\alpha_{ju}\frac{\alpha_j^-}{\mu_{ju}+\alpha_j^-}$$

则

$$\beta_{ju}=\alpha_{ju}\frac{\mu_{ju}}{\mu_{ju}+\alpha_j^-}=\mu_{ju}\rho_{ju},\ \ \beta_{ju^-}=\alpha_{ju}\frac{\alpha_j^-}{\mu_{ju}+\alpha_j^-}=\alpha_j^-\rho_{ju}\ ,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ u=1,\ 2,\ \cdots,\ I$$

把β_{ju}，β_{ju^-}带入等式 (4)、(5) 中，得此问题的交通方程，所以，若α_{jn}, α_j^-为此方程组的解，结论得证。

定理 3 在满足条件 a）或 b）的情况下，具有有限容量服务节点与消极信号的排队网络队长的稳态分布是

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{n})=\prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{n}_j),\ \boldsymbol{n}_j=(n_{j1},\ n_{j2},\ \cdots,\ n_{jI})$$

其中

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{n}_j)=b_j^{-1}\frac{n_j!}{n_{j1}!\ n_{j2}!\cdots n_{jI}!}\prod_{u=1}^{I}\rho_{ju}^{n_{ju}}$$

且在节点j处有n_j个顾客的概率

$$\pi_j(n_j)=\frac{\rho_j^{n_j}}{\sum\limits_{n_j=0}^{k_j}\rho_j^{n_j}},\ \rho_j=\sum_{u=1}^{l}\rho_{ju},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

且联合概率分布为

$$\pi(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_N)=\prod_{j=1}^{N}\pi_j(n_j)$$

证明　给定$\boldsymbol{n}_j=(n_{j1},\ n_{j2},\ \cdots,\ n_{jI})$，$n_j=\sum\limits_{u=1}^{I}n_{ju}$，在节点$j$处有$n_j$个位置，其中分别有$n_{j1}$，$n_{j2}$，$\cdots$，$n_{jI}$个位置属于1，2，$\cdots$，$I$类，则$(c_j(1),\ c_j(2),\ \cdots, c_j(I))$的可能组合有

$$C_{n_j}^{n_{j1}}C_{n_j-n_{j1}}^{n_{j2}}\cdots C_{n_{jI}}^{n_{jI}}=\frac{n_j!}{n_{j1}!\ n_{j2}!\cdots n_{jI}!}$$

所以

$$\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{n}_j)=\frac{n_j!}{n_{j1}!\ n_{j2}!\cdots n_{jI}!}\boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{c}_j)=b_j^{-1}\frac{n_j!}{n_{j1}!\ n_{j2}!\cdots n_{jI}!}\prod_{u=1}^{I}\rho_{ju}^{n_{ju}}$$

其余同理，其中

$$\pi_j(n_j)=\sum_{n_{j1}=0}^{n_j}\sum_{n_{j2}=0}^{n_j-n_{j1}}\cdots\sum_{n_{jI}=0}^{n_j-(n_{j1}+\cdots+n_{j(I-1)})}b_j^{-1}\frac{n_j!}{n_{j1}!\ n_{j2}!\cdots n_{jI}!}\prod_{u=1}^{I}\rho_{ju}^{n_{ju}}=\frac{\rho_j^{n_j}}{\sum\limits_{n_j=0}^{k_j}\rho_j^{n_j}}$$

证毕。

得到系统队长的稳态分布，亦可得到其它稳态指标，如平均队长等，在此不述。

3　结束语

具有N个有限节点与信号的一般排队网络，通过改变δ_j^A，δ_j^P，η_j可以得到很多具体模型的分布，因此具有巨大应用价值。同时，当对有限容量取极限时，又可得到无限容量排队网络的结果。本研究可以继续扩展到具有多服务台节点的网络，同样会有相应乘积形式稳态解。但本文分析的只是一种特殊转移，对溢出顾客类型做了特殊处理，才有乘积形式解，如果考虑一般转移，则未必具有乘积形式，还有待修正。

参考文献

[1] Chao X, Miyazawa M, Pinedo M. Queueing networks [M]. New York: John Wiley & Sons, 1999.

[2] Baskett F, Chandy K M, Muntz R R, et al.. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers [J]. Journal of the ACM, 1975,22 (3): 248-260.

[3] Rusty O, Nathaniel J. Queueing network analysis: concepts, terminology and methods [J]. Journal of Systems and Software, 2003,66 (2): 99-117.

[4] 周家良，贾波．具有N个有限容量服务节点的 Jackson 排队网络 [J]．西安交通大学学报，1998,32 (6): 95-99.

Queueing networks with N finite buffer nodes and negative signals

LI Ji-hong[1], TIAN Nai-shuo[2]

(1. College of Economic and Management, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China; 2. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: In this paper, a queueing network with multi-class customers and negative signals in general service discipline is considered. Each node is a finite buffer queue with jump-over blocking. Using the quasi-reversibility property in each node, the precise product form solution of the stable distribution in special transition form is solved. The method of the quasi-reversibility is used to testify the product form solution and can be applied broadly in queueing networks.

Key words: finite buffer; negative signals; quasi-reversibility; product form