# 可见 M/G/1 休假排队顾客均衡策略研究①

李继红

（山西大学 管理与决策研究所，太原 030006）

**摘 要：**服务系统中，顾客会依据掌握的信息不同而作出进入或离开的决策，而服务机构的所处状态也会对顾客行为造成影响。基于此，本文研究了可见情形下的 M/G/1 休假排队顾客均衡策略，其中顾客到达时将被告知当前的排队队长和服务状态（工作或休假）。通过分析不同的服务状态下顾客的排队时间，我们得到了工作和休假状态下顾客的进入概率。通过实证分析，展示了理论结果的有效性。

**关键词：** M/G/1 排队；休假；全可见；顾客均衡

**中图分类号：**O226 **文献标识码：**A **文章编号：**（2015）01-0065-71

## 0 引言

现代社会中，由于顾客来源的不确定性和机构自身服务能力的限制，系统运行过程中必然会产生排队等待现象。一般来讲，设计和控制服务机构的运行水平主要是平衡其中的两个方面：服务效果和相关经济利益。以往排队论的优化研究都是从管理者的角度出发，默认每一位到达顾客均直接进入系统接受服务，顾客无法决策以选择自己的服务。随着可提供相同服务的多个机构的出现，顾客在服务中亦有选择的权力，面对排队现象，根据自身情况及掌握的服务机构信息，适时地作出决策，决定是否进入机构接受服务。因此，顾客如何抉择才能使自己最大限度地获益，能否且如何找到一个理论上的“解”或“平衡”，也就是对顾客来说最“合理”、“最优”的具体策略，成为目前学者们普遍关注的问题。

顾客的均衡策略研究主要分析服务机构提供的信息水平对顾客行为的影响。企业中的潜在顾客主要通过服务机构提供的“信息流”来了解服务机构运行情况，除了需要掌握可能的等待或延迟信息外，还要了解当前服务机构的状态，是处于正常服务还是离职状态，这些信息都将直接影响到顾客作出进入（enter）此服务机构还是离开（balk）的决策。此方面研究工作可以追溯到 Naor[1]、Edelson 和 Hildebrand[2]的工作，描述了具有简单线性收益-成本结构（reward-cost）的 M/M/1 排队，得到了均衡策略和社会最优策略，同时指出个人利益最大化可能会导致机构无法对自身服务水平有正确的评价，作出一些错误的决策，影响整体社会效益。Whitt[3]分析了两类非可见排队，表明了提供信息往往将同时减少系统的等待（延迟）和输出。随后许多学者在这方面作了扩展，例如附加了优先权、启动时间和重试等。Hassin 和 Haviv[4]综述了这一领域的基本研究成果，为后续的研究工作提供了方便。

本文将在带有休假机制的排队模型中研究顾客策略问题。休假排队系统是处理在一些时间段内，服务员无法服务顾客的情况，如服务员由于经济原因休假（如较低的顾客到达率及高昂的设备成本），在休假期进行预防性维修或进行一些辅助工作。由于类似现象的社会普遍性，其相应的排队模型被广泛关注，具体有 Takagi[5]、Tian 和 Zhang[6]。尽管有大量的文献对休假排队的性能进行了研究，但把休假服务机制与博弈决策结合起来的研究目前还很少。Burnetas 和 Economou[7]首次将顾客止步策略研究引入带有指数分布休假机制的单服务台排队模型中，Economou 和 Kanta[8]、Guo 和 Hassin[9]探讨了在各种信息水平下类似模型的顾客止步策略，Kerner[10]研究了 M/G/1 排队的顾客进入策略。但当前，尚未有基于 M/G/1 可见排

① 基金项目：国家自然科学基金项目（No. 71301091），教育部人文社会科学研究项目（No. 10YJC630114）
作者简介：李继红（1982—）女，山西榆次人，博士，山西大学管理与决策研究所副教授，研究方向：排队系统及其应用、运作管理及决策研究，Email：lijh1982@sxu.edu.cn。

队模型的顾客止步策略行为研究，同时缺乏对各类运行系统的实证分析和模拟。

基于此，本文将研究可见情形下的M/G/1休假排队顾客均衡策略，从理论的角度解决完全可见信息下的顾客决策问题，同时进行实证分析，试图考察不同系统状态对顾客个人行为的影响。

## 1 模型假设

考虑空竭服务多重休假M/G/1排队模型，即顾客到达遵循参数为 $\lambda$ 的Poisson过程，服务时间服从一般分布，单服务台工作，每当系统变空时，服务员去休假一次，若服务员结束休假回来发现系统中至少有一位顾客等待，则立即为等待的顾客服务，直到系统再次变空时又去进行新的休假；若服务员休假回来发现系统中没有顾客等待，则服务员就接着开始另一次新的休假，简记M/G/1（E，MV）。

设服务时间同一般分布 $B(x)$，具有有限一、二阶矩，其均值和LST（Laplace Stieltjes transform）分别为 $E[B]$ 和 $B*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}B(x)$。记 $R_B$ 为剩余服务时间，其概率分布和均值分别

$$R_B(x)=\frac{1}{E[B]}\int_0^x(1-B(u))du,\quad E[R_B]=\frac{E[B^2]}{2E[B]}$$

设休假时间同一般分布 $V(x)$，具有有限一、二阶矩，其均值和 $LST$ 分别为 $E[V]$ 和 $V*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}V(x)$。记 $R_V$ 为剩余休假时间，其概率分布和均值分别为

$$R_V(x)=\frac{1}{E[V]}\int_0^x(1-V(u))\mathrm{d}u,\quad E[R_V]=\frac{E[V^2]}{2E[V]}$$

全可见排队，是指每一位到达顾客对系统队长、服务员状态等系统信息都是可视的，根据自身的情况权衡利弊后，选择进入或是离开，并且作出决策后不允许反悔。在下面讨论中假定到达间隔、服务时间和休假长度相互独立，采用FCFS（先到先服务）原则。

## 2 顾客均衡策略

我们感兴趣的是顾客到达全可见排队系统后将采取何种策略，使得自身净收益尽可能大或者避免净收益为负。为量化“收益-成本”结构，记顾客接受服务后所得收益值为 $K$，进入系统后单位时间的逗留花费为 $C$（逗留时间包括等待时间和服务时间）。此外，记 $L$ 为系统队长，即系统中的顾客数（包括正在接受服务的顾客），$I$ 为服务员的状态（$I\in\{0,1\}$，1：忙期，0：休假），$S_i(i\in\{0,1\})$ 为顾客在服务系统中的逗留时间，$q_n$ 为到达顾客观察到 $L=n$，$n\geq 0$ 时，选择进入的概率，因此当收益函数 $R(q_n)=K-CE[S_i]>0$ 时，到达顾客进入，$R(q_n)<0$ 时，顾客选择离开，$R(q_n)=0$ 时，则选择进入和离开是无差别的。为简化，记 $Q_n=(q_1,\cdots,q_n)$，$Q=Q_\infty$。

基于上述假设，分别记策略集为 $\tilde{Q}$，效用函数为F，令F（a；b）为标定顾客采取策略 $a$，而其他顾客选择策略 $b$ 时，顾客的收益或所得。若对 $\forall q\in\tilde{Q}$，均有 $F(q_e,q_e)\geq F(q,q_e)$，则称 $q_e$ 为一个（对称纳什）均衡策略。若对 $\forall q\in\tilde{Q}$，均有 $F(q_1,q)\geq F(q_2,q)$，且至少存在一个 $q$ 使得不等式严格成立，则称策略 $q_1$ 比策略 $q_2$ 占优。如果存在策略 $q^*\in\tilde{Q}$ 比策略集 $\tilde{Q}$ 中任意策略都占优，则称 $q^*$ 为占优策略。

由于在多重休假服务机制下任何时刻服务员只处于“工作”或“休假”两种状态之一，加之到达顾客对系统信息全可见，故下面将分情况进行讨论。

### 2.1 忙期状态

服务员处于忙期时（标记为1），$q_n$，$Q_n$ 和 $Q$ 相应变化为 $q_n^1$，$Q_n^1=(q_1^1,\cdots,q_n^1)$ 和 $Q^1=Q_\infty^1$。假设 $K>C(E[R_B]+E[B])$，$q_0^1=1$，当 $L=n$ 足够大使得 $K<C(E[R_B]+nE[B])$ 时，有 $q_n^1=0$。令使得 $q_n^1=0$ 的最小 $n$ 为系统队长 $L$ 的最大值，在此不讨论 $L$ 超过 $n$ 时，到达顾客的策略反应。

为使结果更合理，另假设不等式 $q_n^1 E[B] < 1$ 成立，以保证系统最终可达平衡状态。在进入概率为 $Q^1$ 的前提下，记剩余服务时间的条件期望为

$$\vec{r}_n^1(Q^1) = E_{Q^1}[R_B \mid L = n], \quad n \geqslant 1$$

详见 Haviv 和 Kerner [11]，具体形式和初始形式分别为

$$\vec{r}_n^1(Q^1) = \frac{B*(\lambda q_n^1)}{1 - F_{n-1}^{*1}(\lambda q_n^1)} \vec{r}_{n-1}^1(Q^1) - \frac{1}{\lambda q_n^1} + E[B], \quad n \geqslant 2, \quad \vec{r}_1^1(Q^1) = \frac{E[B]}{1 - B*(\lambda q_1^1)} - \frac{1}{\lambda q_1^1}$$

其中，$F_n^{*1}(s)$ 为剩余服务时间的条件 $LST$，即 $F_n^{*1}(s) = E[e^{-sR_B} \mid L = n]$，$n \geqslant 1$，具体形式和初始形式分别为

$$F_n^{*1}(s) = \frac{\lambda q_n^1}{s - \lambda q_n^1}\left(B^*(\lambda q_n^1)\frac{1 - F_{n-1}^{*1}(s)}{1 - F_{n-1}^{*1}(\lambda q_n^1)} - B^*(s)\right), \quad n \geqslant 2;$$

$$F_1^{*1}(s) = \frac{\lambda q_1^1}{s - \lambda q_1^1}\frac{B^*(\lambda q_q^1) - B^*(s)}{1 - B^*(\lambda q_n^1)}$$

可见，$F_1^{*1}(s)$ 是 $q_1^1$ 的函数，所以 $F_n^{*1}(s)$ 不仅是 $q_n^1$，$F_{n-1}^{*1}(s)$ 的函数，同时也是 $q_1^1$，…，$q_{n-1}^1$ 的函数，且有 $\vec{r}_n^1(Q^1) = \vec{r}_n^1(Q_n{}^1)$。

标定一位到达顾客，当他看见服务员处于忙期且系统队长 $L=n$ 后选择进入时，其逗留时间为正在接受服务的顾客的剩余服务时间加上 $L=n$ 个服务时间（除正在接受服务的顾客，剩余的 $n-1$ 位顾客加上自身），其平均逗留时间记为 $E[S_1] = \vec{r}_n^1(Q^1) + nE[B]$。

记顾客的（纳什）均衡策略集为 $Q^{e1} = (q_1^{e1}, q_2^{e1}, \cdots)$，由纳什均衡原理知，如果所有顾客均采取 $Q^{e1}$ 中的策略，就会构成平衡局势，顾客中任何一位单方面地改变自己的策略，只可能使自己的收益下降（或不变），绝不可能使自己的收益增加。因此 $q_n^{e1}$ 满足

$$q_n^{e1} = \begin{cases} 1, & K > C(\vec{r}_n^1(Q_{n-1}^{e1}) + nE[\mathrm{B}]) \\ q, & K = C(\vec{r}_n^1(Q_n^{e1}) + nE[\mathrm{B}]) \\ 0, & K < C(\vec{r}_n^1(Q_{n-1}^{e1}) + nE[\mathrm{B}]) \end{cases}$$

其中，$q \in (0, 1)$。如果 $K = C(\vec{r}_n^1(Q_n^{e1}) + nE[B])$，则不管顾客是进入、离开还是以概率 $q$ 进入，其收益均为0。显然 $Q^{e1}$ 是可以通过递推方法得到，即若 $Q_{n-1}^{e1}$ 已知，则 $Q_n^{e1}$ 可递推求得，所以首先需明确初始值 $Q_1^{e1} = q_1^{e1}$。

**引理 2.1**：$E[R_B \mid L = 1] = \begin{cases} \dfrac{E[B]}{1 - B*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}, & q > 0; \\ \dfrac{E[B^2]}{2E[B]}, & q = 0. \end{cases}$

**定理 2.1**：若 $L=1$，则下列情况中至少有一种成立：

情况 1：如果 $E[B] + \max_{0\leqslant q\leqslant 1}\left\{\dfrac{E[B]}{1 - B*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}\right\} \leqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则选择进入是顾客占优策略；

情况 2：如果 $E[B] + \max_{0\leqslant q\leqslant 1}\left\{\dfrac{E[B]}{1 - B*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}\right\} \geqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则选择离开是顾客占优策略；

情况 3：如果占优策略不存在，则有

a. 若 $E[B] + \dfrac{E[B]}{1 - B*(\lambda)} - \dfrac{1}{\lambda} \leqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则“以概率 1 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e1} = 1$；

b. 若 $E[B] + \dfrac{E[B^2]}{2E[B]} \geqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则“以概率 0 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e1} = 0$；

c. 若存在 $q_1^1$，$0 < q_1^1 < 1$，使得

$$E[B] + \frac{E[B]}{1 - B*(\lambda q_1^1)} - \frac{1}{\lambda q_1^1} = \frac{K}{C} \tag{1}$$

成立，则“以概率 $q_1^1$ 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e1} = q_1^1$。

证明：若情况 1（或情况 2）成立，即对 $\forall q \in [0, 1]$，标定顾客的收益恒为正（或负），则占优策略存在，即进入（或离开）。若情况 3a（或 3b）中的不等式成立，即顾客“以概率 1 进入”（或离开）后，其收益为正（或为负），在这种情况下，记 $q_1^{e1} = 1$（或 $q_1^{e1} = 0$）。若情况 3c 中定义的 $q_1^1$ 存在，顾客以概率 $q_1^1$ 进入后收益为 0，结合纳什均衡的思想，对于顾客来说，没有比“以概率 $q_1^1$ 进入”更好的策略反应，因此 $q_1^{e1} = q_1^1$。

此外，$\bar{r}_1^1(Q^1)$ 作为 $q_1^1$ 的连续函数，除非情况 1 或者情况 2 成立，否则，一定存在 $q_1^{e1} \in [0, 1]$ 使得情况 3 成立。但由于 $B*(\lambda q_1^1) = e^{q_1^1} B*(\lambda)$，即（1）式可化简为

$$E[B] + \frac{E[B]}{1 - e^{q_1^1} B*(\lambda)} - \frac{1}{\lambda q_1^1} = \frac{K}{C} \tag{2}$$

## 2.2 休假状态

服务员处于休假时（标记为 0），$q_n$，$Q_n$ 和 $Q$ 相应变化为 $q_n^0$，$Q_n^0 = (q_1^0, \cdots q_n^0)$ 和 $Q^0 = Q_\infty^0$。假设不等式 $K > C(E[R_V] + E[B])$，$q_1^0 = 1$；$q_n^0 E[B] < 1$，$n \geqslant 1$ 成立，同样不研究 $L$ 超过 $n$ 时的到达顾客的策略反应。在进入概率为 $Q^0$ 的前提下，记剩余休假时间的条件期望为

$$\bar{r}_n^0(Q^0) = E_{Q^0}[R_V \mid L = n], \quad n \geqslant 1$$

详见 Haviv 和 Kerner[11]，具体形式和初始形式分别为

$$\bar{r}_n^0(Q^0) = \frac{V*(\lambda q_n^0)}{1 - F_{n-1}^{*0}(\lambda q_n^0)} \bar{r}_{n-1}^0(Q^0) - \frac{1}{\lambda q_n^0} + E[V], \quad n \geqslant 2, \quad \bar{r}_1^0(Q^0) = \frac{E[V]}{1 - V*(\lambda q_1^0)} - \frac{1}{\lambda q_1^0}$$

其中，$F_n^{*0}(s)$ 为剩余服务时间的条件 $LST$，即 $F_n^{*0}(s) = E[e^{-sR_V} \mid L = n]$，$n \geqslant 1$，具体形式和初始形式分别为

$$F_n^{*0}(s) = \frac{\lambda q_n^0}{s - \lambda q_n^0}\left(V*(\lambda q_n^0)\frac{1 - F_{n-1}^{*0}(s)}{1 - F_{n-1}^{*0}(\lambda q_n^1)} - V*(s)\right), \quad n \geqslant 2;$$

$$F_1^{*0}(s) = \frac{\lambda q_1^0}{s - \lambda q_1^0} \frac{V*(\lambda q_q^0) - V^*(s)}{1 - V(\lambda q_n^0)}$$

可见，$F_1^{*0}(s)$ 是 $q_1^0$ 的函数，所以 $F_n^{*0}(s)$ 不仅是 $q_n^0$，$F_{n-1}^{*0}(s)$ 的函数，同时也是 $q_1^0$，$\cdots$，$q_{n-1}^0$ 的函数，且有 $\bar{r}_n^0(Q^0) = \bar{r}_n^0(Q_n{}^0)$。

标定一位到达顾客，当他看见服务员处于休假期且系统队长 $L = n$ 后选择进入时，其逗留时间为服务员的剩余休假时间加上 $L = n + 1$ 个服务时间（顾客到达时系统队长 $L = n$ 加上自身）。记其平均逗留时间为 $E[S_0] = \bar{r}_n^0(Q^0) + (n + 1)E[B]$。

记顾客的（纳什）均衡策略集为 $Q^{e0} = (q_1^{e0}, q_2^{e0}, \cdots)$，由纳什均衡原理知，$q_n^{e0}$ 满足：

$$q_n^{e0} = \begin{cases} 1, & K > C(\bar{r}_n^0(Q_{n-1}^{e0}) + (n + 1)E[B]) \\ q, & K = C(\bar{r}_n^0(Q_n^{e0}) + (n + 1)E[B]) \\ 0, & K < C(\bar{r}_n^0(Q_{n-1}^{e0}) + (n + 1)E[B]) \end{cases}$$

其中，$q \in (0, 1)$。显然 $Q^{e0}$ 是可以通过递推的方法得到，首先需明确初始值 $Q_1^{e0} = q_1^{e0}$。引用类似 Haviv 和 Kerner[11] 中的结论。

**引理 2.2**：$E[R_V \mid L = 1] = \begin{cases} \dfrac{E[V]}{1 - V*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}, & q > 0; \\ \dfrac{E[V^2]}{2E[V]}, & q = 0. \end{cases}$

**定理 2.2**：若 $L=1$，则下列情况中至少有一种成立：

情况 1：如果 $E[B] + \max_{0 \leqslant q \leqslant 1}\left\{\dfrac{E[V]}{1 - V*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}\right\} \leqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则选择进入是顾客占优策略；

情况 2：如果 $E[B] + \max_{0 \leqslant q \leqslant 1}\left\{\dfrac{E[V]}{1 - V*(\lambda q)} - \dfrac{1}{\lambda q}\right\} \geqslant \dfrac{K}{C}$ 成立，则选择离开是顾客占优策略；

情况 3：如果占优策略不存在，则有

a. 若 $E[B]+\frac{E[V]}{1-V*(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{K}{C}$ 成立，则“以概率 1 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e0}=1$；

b. 若 $E[B]+\frac{E[V^2]}{2E[V]}\geqslant\frac{K}{C}$ 成立，则“以概率 0 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e0}=0$；

c. 若存在 $q_1^0$，$0<q_1^0<1$，使得

$$E[B]+\frac{E[V]}{1-V*(\lambda q_1^0)}-\frac{1}{\lambda q_1^0}=\frac{K}{C} \tag{3}$$

成立，则“以概率 $q_1^0$ 进入”是顾客均衡策略，即 $q_1^{e0}=q_1^0$。

证明过程与定理 2.1 类似。同样的，$\bar{r}_1^0(Q^0)$ 作为 $q_1^0$ 的连续函数，除非情况 1 或者情况 2 成立，否则，一定存在 $q_1^{e0}\in[0,1]$ 使得情况 3 成立。类似地，(3) 式可化简为

$$E[B]+\frac{E[V]}{1-e^{q_1^0}V*(\lambda)}-\frac{1}{\lambda q_1^1}=\frac{K}{C} \tag{4}$$

## 3 实证分析

日常生活中的排队大多属于全可见排队，银行客户服务系统是典型平行排列的多服务台系统，为提高服务效率，银行现在普遍使用窗口自动叫号系统，所有同类服务需求的客户排在了同一个队列上。为了便于分析问题，若将多服务台看成一个整体，则该排队系统就归属于单队列排队模型。现以大学某银行营业厅为例，对全可见休假排队的顾客均衡策略做一简单分析。根据统计资料，顾客到达率与时间段有关，一般在上午 9：00—10：30 和下午 2：30—4：00 顾客到达率比其他的时间段高。现考虑 8：00—9：00、9：00—10：00 两个时间段的情况，分别代表一般情况和繁忙时的情况，其中，顾客编号 $i$，到达时间 $T_i$，服务时间 $B_i$，到达间隔 $t_i$，排队等待时间 $X_i$。具体数据见表 1 和表 2。

**表 1 8：00—9：00 的统计数据**

**Table 1 The statistics of 8：00—9：00**

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_i$ | 0 | 2 | 6 | 10 | 13 | 19 | 22 | 25 | 27 | 31 | 35 | 38 | 43 | 45 | 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 60 |
| $B_i$ | 3 | 2 | 4 | 1 | 5 | 4 | 2 | 3 | 5 | 1 | 3 | 1 | 2 | 6 | 2 | 4 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| $t_i$ | 2 | 4 | 4 | 3 | 6 | 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | - |
| $X_i$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

由表 1 可计算出：平均时间间隔为 $1/\lambda=60/19=3.16$(分钟/人)，平均到达率为 $\lambda=20/60=0.33$(人/分钟)，平均服务时间为 $E[B]=55/20=2.75$（分钟/人），平均服务率为 $1/E[B]=20/55=0.36$(人/分钟)。

**表 2 9：00—10：00 的统计数据**

**Table 2 The statistics of 9：00—10：00**

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_i$ | 0 | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 13 | 15 | 16 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| $B_i$ | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 6 | 2 | 4 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| $t_i$ | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| $i$ | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| $T_i$ | 31 | 33 | 35 | 36 | 38 | 40 | 43 | 45 | 47 | 49 | 52 | 53 | 54 | 56 | 59 | 60 |
| $B_i$ | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 7 | 1 | 4 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| $t_i$ | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | - |
| $X_i$ | 12 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 11 | 10 | 10 | 9 | 13 | 13 | 16 | 16 | 14 | 15 |

由表 2 可计算出：平均时间间隔为 $1/\lambda = 60/31 = 1.94$（分钟/人）；平均到达率 $\lambda = 32/60 = 0.53$（人/分钟），平均服务时间为 E［B］=77/32=2.41（分钟/人）；平均服务率为 1/E［B］=32/77=0.42（人/分钟）。

从表 1 中可以看出，在 8：00—9：00 时间区间内，每个服务台有 20 位顾客到达，其中有 1 位顾客必须等待，平均等待时间：Wq=1/20=0.05（分钟）。在表 2 中可以得出，在 9：00—10：00 时间区间内，每个服务台有 32 位顾客到达，有 29 位顾客必须等待，平均等待时间：Wq=（2+2 +…+14+15）=32=9.125（分钟）。

根据以上分析，在 8：00—9：00 时间区间内，顾客平均到达率为 0.33 人/分钟，平均服务率为 0.36 人/分钟，在 9：00—10：00 时间区间内分别为 0.53 人/分钟和 0.42 人/分钟。可以看出，在 8：00—9：00时间区间内，平均服务率是高于顾客到达率的；而在 9：00—10：00 时间区间内，顾客到达率是高于平均服务率的。由于表 2 中的数据量相对较大，所以更具有代表性。由于平均服务率小于顾客平均到达率 0.53，这样就使得排队越来越长而直到高峰期过后才能得到缓解。

下面，探讨在这两组数据下到达顾客的最优策略选择，这里只对全可见 M/G/1（E，MV）排队模型服务员忙期状态 $L=1$ 时的情况进行分析。假设收益值 $K=10$，顾客单位时间逗留花费 $C=1$，服务时间服从正态分布，其分布函数和 LST 为

$B(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ -\infty<x<+\infty$，$B*(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dB(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x-\frac{x^2}{2}}dx$. 由表 1 得 $\lambda=0$：33，$E$［$B$］=2.75，$B*(\lambda)=B*(0.33)=0.39$，代入（2）式得到 $q_1^1=0.94$。由表 2 得 $\lambda=0$：53，$E$［$B$］=2.41，$B*(\lambda)=B*(0.53)=0.34$，代入（2）式得到 $q_1^1=0.80$。

显然，0.94>0.80，即表 1 中的顾客均衡策略值略大于表 2 中的顾客均衡策略值，这是符合现实情况的，反映了顾客避免拥挤的心态。

## 4 结论

本文从理论与实证双重方面开展研究。理论方面，以全可见 M/G/1 排队模型为研究基础，在两种信息状态下，从顾客个人角度，确定相应策略形式，希望通过对已有理论成果的分析和创新，在丰富现有理论研究成果的同时，为排队研究的发展和创新提供新的理论基础和分析方法。通过实证观察的结果，一方面，验证理论结果的合理性；另一方面，通过仿真对比，揭示不同系统状态对顾客个人影响，为给出可行性建议提出理论指导。

**参考文献：**


［1］Naor. P. The regulation of queue size by levying tolls.［J］. *Econometrica*. 1969，37：15-24.

［2］Edelson N. M.，D. K. Hildebrand. Congestion tolls for poisson queuing processes［J］. *Econometrica*，1975，43：81-92.

［3］Whitt W.，Improving service by informing customers about anticipated delays［J］. *Management Science*，1999，45：192-207.

［4］Hassin R.，M. Haviv. To queue or not to queue：equilibrium behavior in queueing systems［M］. *Kluwer Academic Publishers*，Boston，2003.

［5］Takagi H. Queueing analysis. Volume I. vacation and priority systems［M］. *Springer Science*：*North-Holland*，*Amsterdam*，1991：1-203.

［6］Tian N.，G. Zhang. Vacation Queueing Models-Theory and Applications［M］. *Springer-Verlag*，2006：1-128.

［7］Burnetas A.，Economou A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times［J］. *Queueing Systems*，2007，56：213-228.

［8］Economou A.，Kanta S. Equilibrium customer strategies and social-profit maximization in the single-server constant retrial queue［J］. *Naval Research Logistics*，2011，582：107-122.

［9］Guo P.，Hassin R. Strategic Behavior and Social Optimization in Markovian Vacation Queues［J］. *Operations Research*，2011，59（4）：986-997.

[10] Kerner Y., Equilibrium joining probabilities for an M/G/1 queue [J]. *Games and Economic Behavior*, 2011, 71: 521-526.
[11] Haviv M., Y. Kerner. On balking from an empty queue [J]. *Queueing Systems*, 2007, 55: 239-249.

## Customers' Equilibrium Strategies in the Observable M/G/1 Queue with Vacations

*Li Jihong*

Institute of Management and Decision, Shanxi University, Taiyuan, 030006, China

**Abstract**: In service systems, customers will make the decision to enter or to leave according to the information which is provided by service systems, and the service states also will affect the customers' behavior. Based on this, the paper studies customers' equilibrium strategies in the observable M/G/1 queue with vacations, where the customers will know the queue length and service state (busy or vacation) when he arrives. By analyzing the queueing time of the customer under different states, the customers' balking probabilities are obtained under the busy and vacation states. The empirical analysis presents the validity of theoretical results.

**Key words**: M/G/1 queue; vacation; fully observable; customers' equilibrium