

随机汇率下对冲基金最优投资策略^①

费为银, 张繁红, 李允贺

(安徽工程大学 金融工程系, 芜湖 241000)

摘要: 本文在展望理论的框架下, 研究汇率因素对带有激励费的对冲基金经理者最优投资策略的影响。先利用伊藤 (Itô) 公式推导考虑汇率随机变动以本币表示的风险资产价格动力学方程, 后在考虑汇率变动因素后终端财富预期效用最大化的标准下, 利用鞅方法推导最优投资策略。最后本文对结果进行数值模拟, 定量分析汇率因素、激励费和对冲基金经理者在基金中持有的股本对于对冲基金经理者最优投资策略的影响。

关键词: 对冲基金; 汇率变动; 激励费; 鞅方法; 最优投资策略

中图分类号: F830.9; O211.63 **文献标识码:** A **文章编号:** (2018) 01-0065-11

0 引言

采用对冲交易手段的基金称为对冲基金 (hedge fund), 也称避险基金或套期保值基金。基金经理的激励费 (incentive fee) 经常附带高水印条款 (high water mark), 规定在超过先前达到的最高股票价值后才支付业绩费。Goetzmann 等^[1]研究激励费和高水印条款对对冲基金价值的影响, 证明对冲基金的业绩费用对基金经理是有价值的, 反之, 业绩费代表基金经理对投资者财富相当大比例的索取。这些合同中的高水印条款限制了业绩费的价值。在一定条件下, 得出高水印合同成本的闭型解。结果为对冲基金管理公司账户的估值提供了一个框架。Kouwenberga 和 Ziembab^[2]分析激励费用和基金经理自身的投资对对冲基金经理投资策略的影响, 发现厌恶亏损的基金经理会以较高的激励费增加基金投资策略的风险, 然而, 如果基金中有基金经理自己的大量资金 (至少 30%), 风险承担就会大大减少。有激励费的对冲基金平均回报率明显较低 (扣除奖励费), 而下行风险与奖励费水平正相关, 收取高额激励费的基金, 其平均回报率相对较高, 但风险也明显较高。Agarwal 和 Naik^[3]分析对冲基金使用买入持有和基于期权策略的系统性风险敞口, 结果表明, 大量以股票为导向的对冲基金策略表现出类似于市场指数看跌期权的空头头寸, 因此承担着显著的左尾风险, 这种风险被常用的均值-方差框架忽略。使用平均条件风险价值框架, 显示平均方差框架低估尾部风险的程度, 通过研究对冲基金的系统性风险敞口, 发现对冲基金近期的表现明显好于长期表现。Carpenter^[4]解决了风险厌恶型经理对其控制的资产进行看涨期权补偿的动态投资问题, 在经理的最优政策下, 期权要么实值要么深度虚值终止。当资产价值趋于 0 时, 波动率趋于无穷。然而, 期权补偿并不能严格地导向更大的风险寻求。有时, 与期权相比, 经理人的最优波动性更小, 因为他在交易自己的账户。Hodder 和 Jackwerth^[5]研究典型的对冲基金合约对具有幂效用经理人的激励效应。在一年期的评估中, 基金经理显示风险承担与基金价值显著不同。但在多个年度评估期中, 发现如果基金表现得相当好, 经理的风险承担会迅速减缓。对对冲基金终止进行建模最现实的方法是使用内生的终止障碍, 其中经理人最优地选择终止基金。当基金价值接近这个障碍时, 基金经理增加风险承担, 并且这种边界行为在多年期内强烈地持续。Drechsler^[6]研究签订高水印条款的基金经理者最优动态风险选择问题。基金经理者的最优风险选择随着基金价值与高水印之间的差值而不断调整。当外部期权的价值偏低并且投资者有严格的终止策略或基金管理费偏高时, 负收益增加管理者的有效风险厌恶 (去杠杆), 否则负收益会减少管理者的有效风险厌恶 (赌博)。结论表明, 在没有风险承担的限制下, 基金经理最好不要“走开”。当存在风

① 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71571001)。

作者简介: 费为银 (1963—), 男, 安徽芜湖人, 博士, 教授, 研究方向: 金融数学与金融工程、随机控制, E-mail: wyfei@ahpu.edu.cn; 张繁红 (1994—), 男, 安徽安庆人, 硕士研究生, 研究方向: 数理金融, E-mail: 2160810105@stu.ahpu.edu.cn; 李允贺 (1987—), 男, 安徽蚌埠人, 硕士研究生, 研究方向: 金融数学与金融工程, 844151347@qq.com。

险限制时, 损失后离开也许是最优的。Getmansky 等^[7]认为对冲基金和其他另类投资收益往往是高度序列相关的。该文探讨这样的系列相关性的来源, 并认为非流动性和平滑收益是造成系列相关性的来源, 并建立收益平滑的计量经济模型并提出用于平滑剖面与平滑调整的夏普率 (Sharpe ratio) 的估计量, 通过样本数据表明对不同类型的对冲基金所估计的平滑系数变化很大, 也是量化非流动性暴露的有用代理变量。Bali 等^[8]通过因子 β 的替代测度来考察对冲基金对各种金融和宏观经济风险因素的暴露, 并检验它们在预测对冲基金收益的截面变化方面的性能。参数检验和非参数检验都表明违约溢价 β (通货膨胀 β) 和对冲基金未来收益之间显著正相关 (负相关)。Lan 等^[9]建立了对冲基金杠杆和估值模型。与标准风险喜好直觉相反, 即使有恒定的规模收益阿尔法策略, 风险中性经理人变得内生地规避风险, 并随着业绩不佳而降低杠杆率, 以增加基金生存的可能性。研究表明, 管理费占全部补偿的大部分。货币流动、管理重启期权和管理层持股增加了基于高水印激励费的重要性, 但管理费仍然占多数, 并且发现投资者费用的估值对管理者技能评估非常敏感。He 和 Kou^[10]研究在对冲基金管理补偿的第一损失方案中, 基金经理使用他在该基金中的投资首先弥补任何基金损失; 相比之下, 在美国大多数基金目前使用的传统模式中, 基金经理不承担投资者在基金中的损失, 提出了一个基于累积展望理论的框架来分析计算和比较这两种方案中的交易策略、基金风险以及基金经理与投资者的效用。该模型是根据美国对冲基金的历史流失率进行校准的, 发现通过设定合理的参数值, 基金经理和投资者的效用都可以得到改善, 基金风险也可以同时降低, 方法是将传统方案 (10% 的内部资本和 20% 的绩效费) 替换为第一损失方案 (10% 的优先损失资本和 30% 的绩效费)。然而, 当第一个损失计划的业绩费为 40% (当前市场惯例) 时, 这种替代会使投资者处境更糟。刘莹^[11]综述了对冲基金投资收益与风险研究的相关文献, 以及对冲基金对稳定金融市场的作用。从业绩评价和业绩归因角度, 许红伟等^[12]实证性地探讨量化 (对冲) 基金在我国发展初期的表现。费为银等^[13]在展望理论的框架下, 研究通胀等因素对于带有激励费的对冲基金管理者最优投资策略的影响。对冲基金管理者在风险资产和无风险资产中进行投资, 首先利用伊藤公式推导通胀折现的风险资产价格动力学方程, 然后基于考虑通胀折现因素后的终端财富预期效用最大化标准, 利用鞅方法推导最优投资策略的显式解。最后对理论结果进行数值模拟, 定量分析通胀因素, 激励费和对冲基金管理者在基金中持有的股本对最优投资策略的影响。费为银等^[14]分析奈特 (Knight) 不确定下带高水印的对冲基金最优投资组合。对冲基金管理者往往面临投资资产价格的不确定, 这里的不确定包含通常意义下的概率不确定和奈特不确定。资产价格在经典意义下可用布朗运动扰动的随机微分方程加以刻画, 然而由于金融市场环境的复杂性, 资产价格的干扰源用彭实戈提出的 G-布朗运动来刻画更为合理。基金管理者的目标是最大化预期累积激励费的净现值。然后通过非线性期望下随机分析和随机动态规划方法推导出带有特定边界条件的值函数的哈密尔顿-雅可比-贝尔曼方程, 得出相应的基金管理者最优投资组合策略。

目前, 经济全球化使对冲基金管理者跨国投资已经成为投资选择中的重要组成部分。显然, 汇率风险已成为国际投资不可忽略的因素, 汇率的随机性使跨国投资本国币种度量的收益产生损失的风险, 从而需要考虑汇率变动如何影响对冲基金管理者的最优投资组合策略。Kathryn^[15]提出汇率风险是否影响跨国投资的问题, 并经过实证数据分析得出, 在控制了企业相对财富和总体投资水平后, 汇率水平与外商投资没有统计上的显著关系。Kozo 和 Shujiro^[16]研究实际汇率波动如何影响对外国直接投资。从另一视角, Wheeler 和 Chowdhury^[17]探讨了汇率波动对外商选择加拿大, 日本, 英国和美国直接投资的作用。费为银等^[18,19]在跳扩散或机制转换环境下分析了汇率变动对跨国投资决策的影响。人民币汇率风险对我国外商投资的影响受到国内学者的关注。进一步的相关工作可见于刘慧^[20]、李宏等^[21]、王志鹏^[22]、孙宵翀等^[23]、邱立成和刘文军^[24]、闫伟和李树荣^[25]、程瑶和于津平^[26]、孙文莉和金华^[27]等。以上研究成果都为汇率风险因素影响下的对冲基金管理者最优投资模型的研究提供了理论和方法上的借鉴。Azman-Saini 等^[28]探讨泰国和马来西亚关于对冲基金和汇率的关系问题, 首次提供了对冲基金与汇率之间因果关系的实证证据: 首先, 1997 年金融危机期间, 对冲基金领涨泰铢; 其次, 在危机前, 对冲基金和马来西亚林吉特之间存在双向因果关系。

综合上述文献分析发现, 汇率的随机变动所带来的风险会很大程度上影响跨国对冲基金管理者的投资策略。因而考虑汇率因素后, 本文试图对现有的模型进行进一步推广和定量分析。将考虑随机汇率下带有激励费的跨国对冲基金管理者最优投资策略问题, 讨论汇率波动率、激励费和对冲基金管理者持有的股本

等因素对于对冲基金管理者最优投资组合的影响，获得一些较为重要经济意义的结论。

论文安排如下，第1部分构建模型的框架，推导出考虑汇率变动以本币表示的风险资产价格动力学方程和对冲基金管理者的财富方程；第2部分分析激励费对隐性损失厌恶水平的影响，得出激励费会导致风险承担的增加；推导出带有激励费的最优投资策略的表达式；第3部分，进行数值分析，并给出经济学解释；总结放在第4部分；定理的证明放在附录中。

1 基本模型

假设跨国对冲基金管理者初始财富为 $W(0)$ ，而对冲基金的初始价值为 $Y(0)$ 。跨国对冲基金管理者股本占对冲基金价值的比例为 $\nu(0 \leq \nu \leq 1)$ ，同时外部投资者持有对冲基金价值的剩余份额是 $(1-\nu)$ ，对冲基金管理者在 T 时刻的管理费为 $\alpha(1-\nu)Y(T)$ ，其中 $\alpha(\alpha \geq 0)$ 作为管理费。在计值期期末 T ，当对冲基金价值超过激励费合同中规定的高水印 $H(T)$ 时，那么对冲基金管理者将收取超出高水印那部分基金价值的一个比例 $\beta(\beta \geq 0)$ 作为激励费。于是，跨国对冲基金管理者在 T 时刻激励费是 $(1-\nu)\beta \max\{Y(T) - H(T), 0\}$ 。利用展望理论^[29]中的效用函数去估计对冲基金管理者 T 时刻的财富：

$$V(W(T)) = \begin{cases} -A(\theta(T) - W(T))^{\gamma_1}, & W(T) \leq \theta(T) \\ (W(T) - \theta(T))^{\gamma_2}, & W(T) > \theta(T) \end{cases} \quad (1)$$

式中，参数 $0 < \gamma_1 \leq 1$ 和 $0 < \gamma_2 \leq 1$ 分别表示值函数关于损失和收益的曲率； $\theta(T)$ 用于区分损失和收益的参考点； $V(\cdot)$ 表示管理者的财富效用函数； $W(\cdot)$ 表示管理者财富价值函数； A 表示管理者的损失厌恶水平且 $A > 0$ 。

$Z(t)$ 和 $\bar{Z}(t)$ 是带流概率空间 $(\Omega, F, P, \{F_t\}_{t \geq 0})$ 上的两个一维标准布朗运动，其中 $F_t = \sigma\{Z(s), \bar{Z}(s); s \leq t\}$ ， $Z(t)$ 驱动对冲基金管理者投资所在国风险资产价格， $\bar{Z}(t)$ 驱动随机汇率，且设定期望 $E[dZ(t) \cdot d\bar{Z}(t)] = \rho dt$ ，即 $Z(t)$ 与 $\bar{Z}(t)$ 相关系数为 ρ 。假设对冲基金管理者所在国的货币为本币，投资所在国的货币为外币，时刻 t 汇率（投资所在国货币/本国货币） $Q(t)$ 的动力学公式为

$$dQ(t) = hQ(t)dt + \delta Q(t)d\bar{Z}(t), \quad Q(0) = Q_0$$

式中， h 和 δ 为正常数； h 表示即期预期汇率； δ 表示汇率波动率； Q_0 已知。

假设对冲基金管理者投资于本国的无风险资产和国外的风险资产。而无风险资产价格 $P_0(t)$ 和以外币表示的投资所在国风险资产价格 $P(t)$ 分别满足：

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt$$

$$dP(t) = b(t)P(t)dt + \sigma_1(t)P(t)dZ(t)$$

式中， r 为无风险利率（常数）； $b(t)$ 为漂移率； $\sigma_1(t)$ 为波动率。

则对冲基金管理者以本币表示的风险资产价格为 $S(t) = Q(t)P(t)$ ，由伊藤公式得

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dB(t)$$

式中， $\mu(t)$ 表示以本币表示的风险资产价格过程 $S(t)$ 的预期增长率，且 $\mu(t) = h + b(t) + \rho\delta\sigma_1(t)$ ，其中的 $b(t)$ 表示投资所在国风险资产价格过程 $P(t)$ 的预期增长率； $\sigma(t)$ 表示以本币表示的风险资产价格过程 $S(t)$ 的预期波动率， $\sigma(t) = \sqrt{\sigma_1^2(t) + \delta^2 + 2\rho\delta\sigma_1(t)}$ ， $B(t)$ 为 P 下标准布朗运动且有 $dB(t) = \frac{\sigma_1(t)dZ(t) + \delta d\bar{Z}(t)}{\sigma(t)}$ 。

现在考虑一个对冲基金管理者，他在 $t(0 \leq t \leq T)$ 时刻投资在风险资产上的比例为 $\omega(t)$ ，在无风险资产上的比例为 $\omega_0(t)$ 且有 $\omega_0(t) = 1 - \omega(t)$ 。那么，对冲基金的以本币表示的价值 $Y(t)$ 满足：

$$dY(t) = rY(t)dt + [\mu(t) - r]\omega(t)Y(t)dt + \sigma(t)\omega(t)Y(t)dB(t) \quad (2)$$

对冲基金管理者最大化值函数期望，从而最优投资策略问题为

$$\max_{\omega(t)} E[V(W(T))] \quad (3)$$

$$s. t. \quad W(T) = \nu Y(T) + \alpha(1-\nu)Y(T) + \beta(1-\nu) \max\{Y(T) - H(T), 0\} + \pi(T)$$

$$dY(t) = rY(t)dt + [\mu(t) - r]\omega(t)Y(t)dt + \sigma(t)\omega(t)Y(t)dB(t)$$

对任何 $0 \leq t \leq T, Y(t) \geq 0$

式中, $\pi(T) = (1+r)[W(0) - \nu Y(0)]$ 为对冲基金管理者 T 时刻在对冲基金以外的财富; $Y(t)$ 表示 t 时刻对冲基金价值。

2 最优投资

假设对冲基金管理者将基金的价值 $Y(T) = H(T)$ 作为用于区分损失和收益的参考点, 也就是说, 在 T 时刻基金的价值 $Y(T)$ 达到了预先设定的激励费合同中的高水印 $H(T)$ 。如果基金的价值刚好达到基准 $H(T)$, 那么对冲基金管理者 T 时刻的个人财富为

$$W(T) = \nu H(T) + \alpha(1 - \nu)H(T) + \pi(T) \tag{4}$$

并假设对冲基金管理者用于区分损失和收益的参考值:

$$\theta(T) = \nu H(T) + \alpha(1 - \nu)H(T) + \pi(T) \tag{5}$$

由式 (5) 可知, 条件 $W(T) \leq \theta(T)$ 和 $Y(T) \leq H(T)$ 是等价的。将式 (4) 代入式 (1), 得

$$V(W(T)) = \begin{cases} -A(\theta(T) - (\nu + \alpha(1 - \nu))Y(T) - \pi(T))^{\gamma_1}, & W(T) \leq \theta(T) \\ ((\nu + \alpha(1 - \nu))Y(T) + \beta(1 - \nu)(Y(T) - H(T)) + \pi(T) - \theta(T))^{\gamma_2}, & W(T) > \theta(T) \end{cases} \tag{6}$$

利用 $W(T) \leq \theta(T)$ 等价于 $Y(T) \leq H(T)$, 再式 (5) 将代入式 (6), 得值函数, 可表示为

$$V(W(T)) = \begin{cases} -A\{(\nu + \alpha(1 - \nu))(H(T) - Y(T))\}^{\gamma_1}, & Y(T) \leq H(T) \\ \{(\nu + (\alpha + \beta)(1 - \nu))(Y(T) - H(T))\}^{\gamma_2}, & Y(T) > H(T) \end{cases} \tag{7}$$

对式 (7) 乘以一个常数后, 不会影响对冲基金管理者最优投资组合选择问题 (3) 的解。因此, 式 (7) 简化成值函数的标准形式:

$$\bar{V}(Y(T)) = \begin{cases} -A^*(H(T) - Y(T))^{\gamma_1}, & Y(T) \leq H(T) \\ (Y(T) - H(T))^{\gamma_2}, & Y(T) > H(T) \end{cases} \tag{8}$$

式中, $A^* = A(\nu + \alpha(1 - \nu))^{\gamma_1} / (\nu + (\alpha + \beta)(1 - \nu))^{\gamma_2}$ 表示对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平。为了分析激励费对风险承担的影响, 下述命题刻画了隐性损失厌恶水平 A^* 。

命题 1: 给定 $0 \leq \nu \leq 1, \alpha \geq 0$ 且 $\nu + \alpha > 0$, 对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平 A^* 是关于激励费 β 的一个严格减函数, 即 $dA^*/d\beta < 0$ 。

命题 1 表明了激励费的增长将会导致隐性损失厌恶水平的降低。这意味着对冲基金管理者更愿意增加风险承担。

命题 2: 给定 $0 \leq \nu \leq 1$ 且 $\beta > 0$, 那么当 $\gamma_1 = \gamma_2$ 时, 对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平 A^* 是关于对冲基金管理者持有股本 ν 的一个严格增函数, 即 $dA^*/d\nu > 0$ 。

给定 $\gamma_1 = \gamma_2$, 命题 2 表明了如果对冲基金管理者持有的股本非常大, 他会更加关心损失。

现在推导对冲基金管理者的最优投资策略。对冲基金管理者的最优投资组合选择问题 (3) 等价于

$$\max_{\omega(t)} E[\bar{V}(Y(T))] \tag{9}$$

s. t.
$$dY(t) = rY(t)dt + [\mu(t) - r]\omega(t)Y(t)dt + \sigma(t)\omega(t)Y(t)dB(t)$$

对任何 $0 \leq t \leq T, Y(t) \geq 0$

假设市场是动态完备的, 这意味着存在唯一的状态价格密度 $\xi(t)$, 也被称为定价核, 定义为

$$d\xi(t) = -r\xi(t)dt - \kappa(t)\xi(t)dB(t), \quad \xi(0) = 1 \tag{10}$$

式中, $\kappa(t) = \sigma^{-1}(t)[\mu(t) - r]$ 表示市场风险价格。

在完备市场假设下, 类似于 Berkelaar 等^[30] 利用鞅方法求解损失厌恶投资者最优投资组合。假定即期预期汇率、汇率波动率、无风险利率和市场风险价格均为常数。分以下两个步骤求解: 第一步, 导出最优基金价值 $Y^*(T)$ 表达式, 它是定价核 $\xi(T)$ 的一个函数; 第二步, 假设在以本币表示的风险资产价格服从几何布朗运动, 最优投资策略复制了对冲基金的价值, 从而得到对冲基金管理者的最优投资策略。

命题3：在完备市场假设下，T时刻对冲基金的最优价值为

$$Y^*(T) = \begin{cases} H(T) + \left(\frac{Y\xi(T)}{\gamma_2}\right)^{1/(\gamma_2-1)}, & \xi(T) < \xi^* \\ 0, & \xi(T) \geq \xi^* \end{cases}$$

式中， ξ^* 是 $f(x)=0$ 的解，而： $f(x) = \frac{1-\gamma_2}{\gamma_2} \left(\frac{1}{y\xi}\right)^{\gamma_2/(1-\gamma_2)} (\gamma_2)^{1/(1-\gamma_2)} - H(T)y\xi + A^*(H(T))^{y_1}$ ，且有 $y \geq 0$ 满足 $E[\xi(T)Y(T)] = \xi(0)Y(0)$ 。

命题4：在完备市场假设下，以本币表示的风险资产价服从几何布朗运动，那么作为定价核 $\xi(t)$ 与基金价值 $Y(t)$ 的一个函数，对冲基金管理者的最优投资策略 $\omega^*(t)$ 为

$$\omega^*(t) = \frac{\sigma^{-1}\kappa}{Y^*(t)} \left(\frac{\gamma_2}{y\xi(t)}\right)^{1/(1-\gamma_2)} e^{\Gamma(t)} \left(\frac{\varphi(d_2(\xi^*))}{\kappa\sqrt{(T-t)}} + \frac{N(d_2(\xi^*))}{1-\gamma_2}\right) + \frac{\sigma^{-1}\kappa}{Y^*(t)} \cdot \frac{H(t)e^{-r(T-t)}\varphi(d_1(\xi^*))}{\kappa\sqrt{(T-t)}} \quad (11)$$

$$Y^*(t) = H(t)e^{-r(T-t)}N(d_1(\xi^*)) + \left(\frac{\gamma_2}{y\xi(t)}\right)^{1/(1-\gamma_2)} e^{\Gamma(t)}N(d_2(\xi^*)) \quad (12)$$

$$\Gamma(t) = \frac{\gamma_2}{1-\gamma_2} \left(r + \frac{1}{2}\kappa^2\right)(T-t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}\right)^2 \kappa^2(T-t)$$

$$d_1(x) = \frac{\lg(x/\xi(t)) + (r - 0.5\kappa^2)(T-t)}{\kappa\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(x) = d_1(x) + \frac{\kappa\sqrt{T-t}}{1-\gamma_2}$$

式中， $N(\cdot)$ 是标准正态累计分布； $\varphi(\cdot)$ 是密度函数。

命题1和命题2的证明类似文献[30]的Propositions 1~2的证明，本文略去。在附录中证明了命题3和命题4。

3 数值分析及经济学分析

为了更好地说明激励费、对冲基金管理者持有的股本对于对冲基金管理者隐性损失厌恶水平的影响以及激励费、对冲基金管理者持有的股本和汇率变动所带来的风险对于对冲基金管理者的最优投资策略的影响，通过matlab软件进行数值模拟定量分析，并以美国对冲基金管理者在华投资为例，结果如图1和图2所示。

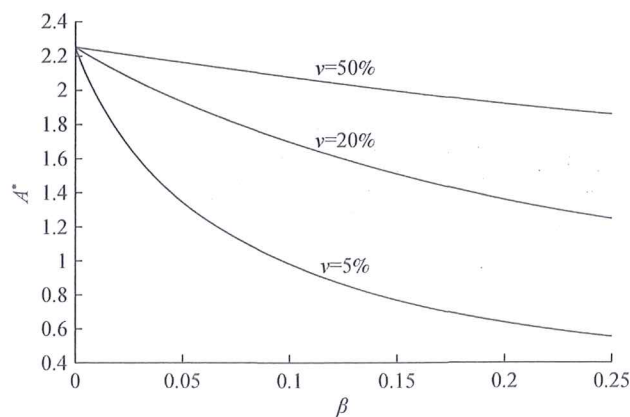


图1 激励费 β 对隐性损失厌恶水平 A^* 的影响

Fig. 1 The effect of the incentive fees β on the implicit level of loss aversion A^*

在图1中，Kahneman和Tversky^[29]通过观察人们在不确定情形下的决策估计出损失厌恶水平 $A = 2.25$ ， $\alpha = 1\%$ ， $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.88$ 。给定这些参数，研究激励费 β 和对冲基金管理者持有的股本 ν 对于对冲基

金管理者的隐性损失厌恶水平 A^* 的影响。从图 1 可以看出，随着激励费的增加，对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平开始减小，这表明对冲基金管理者愿意增加风险承担，开始更多地关心收益而较少地不在乎损失。然而，当对冲基金管理者持有的股本增大时，对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平也在增加，这表明对冲基金管理者更加在乎损失，不愿意增加投资风险。比较图 1 中对冲基金管理者持有不同份额的股本 ν ($\nu=5\%$, $\nu=20\%$, $\nu=50\%$) 所代表的三条线，还可以看出当对冲基金管理者持有的股本增大时，激励费对于对冲基金管理者隐性损失厌恶水平的负面影响将会在一定范围内减弱。此外，图 1 还证明了没有激励费 ($\beta=0$) 时，对冲基金管理者的隐性损失厌恶水平 A^* 等于 2.25。

在图 2 中，设定参数 $A=2.25$, $\alpha=1\%$, $\gamma_1=\gamma_2=0.88$, $\beta=25\%$, $\nu=20\%$, $r=0.04$, $b=0.2$, $\sigma_1=0.3$, $\delta=0.25$, $T=1$, $t=0.5$, $\xi(0)=Y(0)=H(T)=1$, $\rho=-0.5$ 。研究人民币即期预期汇率 h 对于最优投资策略 ω^* 的影响，从图 2 可以看出， h 在 0.6 之前，人民币即期预期汇率的上升会加大美国对冲基金管理者在风险资产上的投资比例，这意味着在面对同样的投资风险时，美国对冲基金管理者的投资回报增加了。但是人民币预期汇率逐渐升高，会导致中国的出口增加和进口的减少。出口加大将拉动物价上升，易引发通货膨胀，这对中国经济发展将产生不利的影响。为此，中国政府会出台一些调控措施进行汇率干预，抑制人民币汇率的上升。随着这些措施实施力度加大，人民币即期预期汇率降低，那么美国对冲基金管理者多获得的美元就会相对减少，人民币即期预期汇率增长到一定程度（大于 0.6）以后，理性的美国对冲基金管理者会逐渐减少在风险资产上的投资比重。

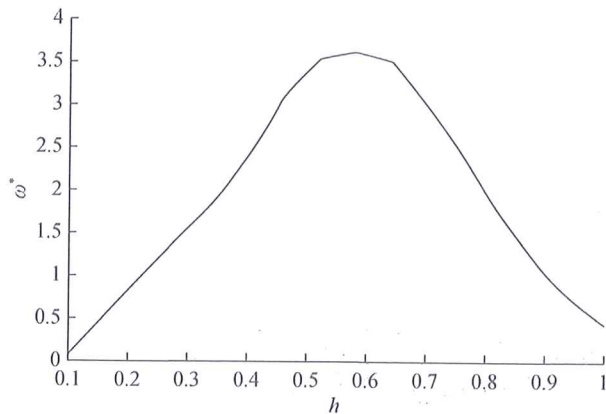


图 2 即期预期汇率 h 对最优投资策略 ω^* 的影响

Fig. 2 The effect of the expected exchange rate h on on portfolio ω^*

在图 3 中，设定参数 $A=2.25$, $\alpha=1\%$, $\gamma_1=\gamma_2=0.88$, $\beta=25\%$, $\nu=20\%$, $r=0.04$, $b=0.2$, $\sigma_1=0.3$, $h=0.4$, $T=1$, $t=0.5$, $\xi(0)=Y(0)=H(T)=1$, $\rho=-0.5$ 。研究汇率波动率 δ 对最优投资策略 ω^* 的影响，从图 3 可以看出，随着人民币汇率波动率的增大，美国对冲基金管理者在风险资产中的投资比例迅

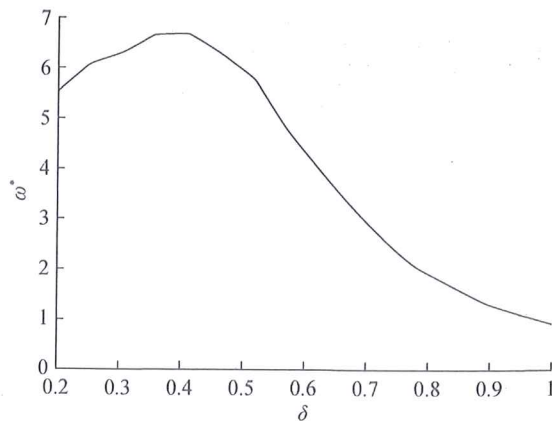


图 3 汇率波动率 δ 对最优投资策略 ω^* 的影响

Fig. 3 The effect of the volatility of exchange rate δ on portfolio ω^*

速提高,当人民币汇率波动率约为0.4时,投资比例达到最大值。然而,随着人民币汇率波动率的持续增大,美国对冲基金管理者在风险资产中的投资比例逐渐下降。这说明如果人民币汇率波动率有一定的波动但其幅度变化不大时,美国对冲基金管理者还保持着一定的投资信心,这是因为此时人民币汇率保持的比较稳定,并且不会对金融市场和汇率市场稳定产生多大影响,从而使美国对冲基金管理者的投资积极性也较为稳定。因此,理性的美国对冲基金管理者会减少在无风险资产上的投资,而将更多的资金投资到中国的风险资产上。但是如果人民币汇率波动率的波动幅度非常大时,表明中国市场波动比较剧烈,中国金融市场环境不稳定性增强。此时美国对冲基金管理者对人民币汇率的波动的敏感性上升,害怕由汇率波动带来的系统性风险从而降低在风险资产上的投资比例。

在图4中,设定参数 $A=2.25$, $\alpha=1\%$, $\gamma_1=\gamma_2=0.88$, $\nu=20\%$, $r=0.04$, $\sigma=0.3$, $\kappa=0.2$, $T=1$, $t=0.5$, $\xi(0)=Y(0)=H(T)=1$ 。图4假定 $t=0.5$ 时刻对冲基金的价值在区间 $(0.75, 1.25)$ 内变化,变动激励费 β ,研究激励费 β 对最优投资策略 ω^* 的影响。从图4可以看出,带有激励费($\beta=15\%$, $\beta=30\%$)的比没有激励费($\beta=0\%$)美国对冲基金管理者在风险资产上的投资比例高,而且随着激励费的增加,带有激励费的美国对冲基金管理者在风险资产上的投资比例也在增加。此外,图4还反映出,当基金价值低于基准 $H(T)=1$ 时,没有激励费的和带有激励费的美国对冲基金管理者,在风险资产上的投资比例都要比对冲基金价值大于1时的投资比例高。这表明,没有激励费的美国对冲基金管理者在基金价值比较低(小于1)时也会增加风险承担,提高基金的价值;而当基金价值比较高(大于1)时会适当降低投资风险。对于带有激励费的美国对冲基金管理者而言,当基金价值低于基准时,带有激励费的美国对冲基金管理者为了获取激励费而增加在风险资产上的投资比例,而且激励费越高,在风险资产上的投资比例就越大;当基金价值高于基准时,理性的带有激励费的美国对冲基金管理者会适度下调在风险资产上的投资比例,并最终维持在一定范围内,从而保证自身在获取一定激励费的情况下降低投资风险。也正是由于在对冲基金价值超过基准以后,带有激励费的美国对冲基金管理者能够适当地减少投资风险才会吸引更多的外部投资者进行投资,使更多新的资金流入对冲基金。

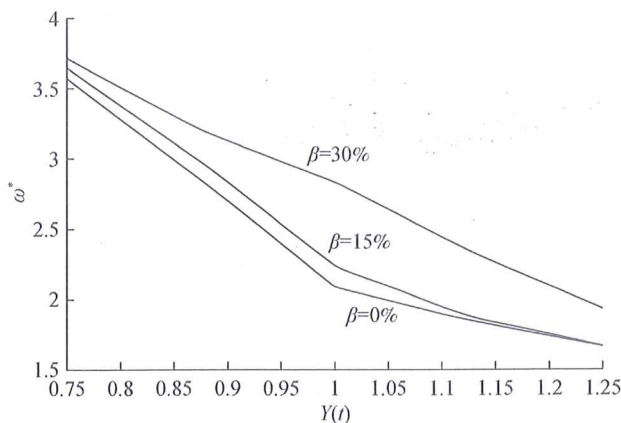
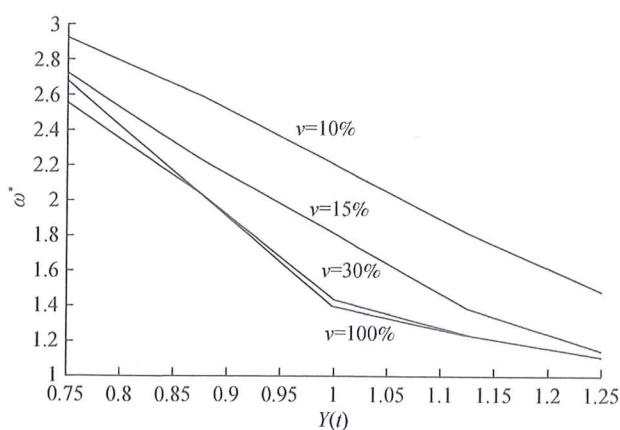


图4 激励费 β 对最优投资策略 ω^* 的影响

Fig. 4 The effect of the incentive fees β on portfolio ω^*

在图5中,设定参数 $A=2.25$, $\alpha=1\%$, $\gamma_1=\gamma_2=0.88$, $\beta=20\%$, $r=0.04$, $\sigma=0.3$, $\kappa=0.2$, $T=1$, $t=0.5$, $\xi(0)=Y(0)=H(T)=1$ 。图5假定 $t=0.5$ 时刻对冲基金的价值在区间 $(0.75, 1.25)$ 内变化,变动美国对冲基金管理者在对冲基金中持有的股本 ν ,考察股本 ν 对最优投资策略 ω^* 的影响。从图5可以看出,随着美国对冲基金管理者持有股本的增加,美国对冲基金管理者在风险资产上的投资比例随之减少。这表明,当美国对冲基金管理者持有的股本比较小(低于10%)时,美国对冲基金管理者是风险喜好型的。他会更多地关心收益而不在乎损失,美国对冲基金管理者愿意承担更高的风险,从而通过激励费获取超额利润。从图5还可以看出,当美国对冲基金管理者持有的股本比较大(高于30%)时,美国对冲基金管理者的投资策略就和 $\nu=100\%$ 的情形非常相似。而 $\nu=100\%$ 情形就相当于美国对冲基金管理者的个人账户。所以当股本比较大时,美国对冲基金管理者是风险厌恶型的。他会更在乎损失,不愿意承担过高的风险,从而减少在风险资产上的投资比例。

图5 股本 ν 对最优投资策略 ω^* 的影响Fig. 5 The effect of the stake on portfolio ω^*

总之，汇率变动所带来的风险、股本和激励费都会影响对冲基金管理者的最优投资策略。激励费会增加对冲基金管理者在风险资产上的投资比例，但是对冲基金管理者持有股本的增加会导致其在风险资产上投资比例的减少。在汇率变动较小时，对冲基金管理者会增加在风险资产上的投资，然而如果汇率变动幅度剧烈时，对冲基金管理者会减少在风险资产上的投资比例。因此，对冲基金管理者应当密切关注投资所在国宏观经济与政治政策的变化，根据自身的风险承受能力进行投资，把握好风险资产配置比例。

4 小结

外汇市场的汇率变化往往受到国内外政治、经济形势的影响，也深刻地影响国际贸易和国际资本的流动，本文试图从对冲基金管理者的视角来研究外汇市场的汇率随机变动如何影响对冲基金管理者的跨国投资，并通过对资产的最优配置达到对冲基金管理者的最大化预期效用目标。这里对冲基金管理者的投资行为受情绪影响，其效用函数采用的是参考值上下具有不同的风险偏好的效用函数。在风险资产和汇率变动服从随机过程的背景下，本文利用随机微分方程、随机控制和鞅论对优化问题进行理论分析，建立了对冲基金管理者的最优投资策略，并利用数值分析分别说明即期预期汇率、汇率波动率如何影响对冲基金管理者投资决策。模拟分析表明汇率的变化对对冲基金管理者最优投资产生明显影响。在汇率变动较小时，对冲基金管理者会增加在风险资产上的投资，然而剧烈的汇率波动会减少对对冲基金管理者在投资所在国风险资产上的投资。同时，我们也发现，激励费的增加会导致对冲基金管理者隐性损失厌恶水平降低，从而促使对冲基金管理者提高在风险资产上的投资比重；对冲基金管理者在基金中持有大量的股本，将会降低对冲基金管理者的风险承担。因此，本文探讨了汇率因素、对冲基金管理者持有的股本和激励费对于对冲基金管理者投资决策的影响，所得结论具有一定的理论意义和应用价值。

参考文献：

- [1] Goetzmann W N, Ingersoll J E, Ross S A. High-water marks and hedge fund management contracts [J]. Journal of Finance, 2003, 58 (4): 1685-1717.
- [2] Kouwenberga R, Ziemba W T. Incentives and risk taking in hedge funds [J]. Journal of Banking and Finance, 2007, 31 (11): 3291-3310.
- [3] Agarwal V, Naik N Y. Risks and portfolio decisions involving hedge funds [J]. Review of Financial Studies, 2004, 17 (1): 63-98.
- [4] Carpenter J N. Does option compensation increase managerial risk appetite? [J]. Journal of Finance, 2000, 55 (5): 2311-2331.
- [5] Hodder J E, Jackwerth J C. Incentive contracts and hedge fund management [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2007, 42 (4): 811-826.

- [6] Drechsler I. Risk choice under high-water marks [J]. *Review of Financial Studies*, 2014, 27 (7): 2052-2096.
- [7] Getmansky M, Lo A W, Makarov I. An econometric model of serial correlation and illiquidity in hedge fund returns [J]. *Journal of Financial Economics*, 2004, 74 (3): 529-609.
- [8] Bali T G, Brown S J, Caglayan M O. Do hedge funds' exposures to risk factors predict their future returns? [J]. *Journal of Financial Economics*, 2011, 101 (1): 36-68.
- [9] Lan Y C, Wang N, Yang J Q. The economics of hedge funds [J]. *Journal of Financial Economics*, 2013, 110 (2): 300-323.
- [10] He X D, Kou S. Profit sharing in hedge funds [J]. *Mathematical Finance*, 2018, 28 (1): 50-81.
- [11] 刘莹. 对冲基金投资收益与风险理论文献综述 [J]. *金融理论与实践*, 2009, (6): 96-102.
Liu Y. Literature review of investment returns and risks theory in hedge fund [J]. *Financial Theory and Practice*, 2009, (6): 96-102. (in Chinese)
- [12] 许红伟, 吴冲锋, 张翔. 我国量化(对冲)基金业绩表现的比较分析 [J]. *投资研究*, 2013, 32 (2): 72-84.
Xu H W, Wu C F, Zhang X. Performance analysis of China's quant (hedge) funds [J]. *Investment Research*, 2013, 32 (2): 72-84. (in Chinese)
- [13] 费为银, 李允贺, 夏登峰. 通胀下带激励的对冲基金最优投资 [J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35 (11): 2740-2748.
Fei W Y, Li Y H, Xia D F. Optimal investment strategies of hedge funds with incentive fees under inflationary environment [J]. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2015, 35 (11): 2740-2748. (in Chinese)
- [14] 费为银, 朱涛涛, 费晨. 奈特不确定下带高水印的对冲基金最优投资组合 [J]. *工程数学学报*, 2015, 32 (6): 823-834.
Fei W Y, Zhu T T, Fei C. Optimal portfolio of hedge fund with high water mark under Knightian uncertainty [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2015, 32 (6): 823-834. (in Chinese)
- [15] Kathryn I D. Do exchange rate changes drive foreign direct investment [J]. *The Journal of Business*, 1995, 68 (3): 405-433.
- [16] Kozo K, Shujiro U. Exchange rate, exchange rate volatility and foreign direct investment [J]. *The World Economy*, 2004, 27 (10): 1501-1536.
- [17] Wheeler M, Chowdhury A R. Does real exchange rate volatility affect foreign direct investment? Evidence from four developed economies [J]. *The International Trade Journal*, 2008, 22 (2): 218-245.
- [18] 费为银, 何丹丹, 张伟. 跳扩散环境下考虑汇率变动的外商直接投资决策问题研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35 (2): 283-290.
Fei W Y, He D D, Zhang W. On study of a foreign investor's investment with fluctuations of exchange rate under jump-diffusion environment [J]. *Systems Engineering Theory and Practice*, 2015, 35 (2): 283-290. (in Chinese)
- [19] 费为银, 夏登峰, 唐仕冰. Knight 不确定与随机汇率下外商投资决策 [J]. *管理科学学报*, 2016, 19 (6): 125-135.
Fei W Y, Xia D F, Tang S B. On study of a foreign investor's investment with random exchange rate under Knightian uncertainty [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19 (6): 125-135. (in Chinese)
- [20] 刘慧. 人民币汇率变动对我国外商直接投资影响的 VAR 分析 [J]. *金融与经济*, 2011, (7): 40-42.
Liu H. The effect of RMB exchange rate on FDI in China [J]. *Journal of Finance and Economics*, 2011, (7): 40-42. (in Chinese)
- [21] 李宏, 何穆彬, 钱利. 人民币汇率变动对我国贸易平衡的影响 [J]. *天津师范大学学报*, 2012, (1): 67-71.
Li H, He M B, Qian L. The effect of RMB exchange rate on trade balance of the different industries in China [J]. *Journal of Tianjin Normal University*, 2012, (1): 67-71. (in Chinese)
- [22] 王志鹏. 论外商直接投资对实际汇率的影响 [J]. *经济评论*, 2002, (2): 87-91.
Wang Z P. Effect of foreign direct investment impact on real exchange rate [J]. *Economic Review*, 2002, (2): 87-91. (in Chinese)
- [23] 孙宵翀, 刘士余, 宋逢明. 汇率调整对外商直接投资的影响 [J]. *数量经济技术经济研究*, 2006, (8): 68-77.
Sun X C, Liu S Y, Song F M. Effect of exchange rate adjustment and its impact on foreign direct investment [J]. *The Journal of Quantitative and Technical Economics*, 2006, (8): 68-77. (in Chinese)
- [24] 邱立成, 刘文军. 人民币汇率水平的高低与波动对外国直接投资的影响 [J]. *经济科学*, 2006, (1): 74-84.
Qiu L C, Liu W J. The effect of RMB exchange rate on FDI [J]. *Economic Science*, 2006, (1): 74-84. (in Chinese)

[25] 闫伟, 李树荣. 带有汇率因素的不连续价格过程的最优投资组合研究 [J]. 运筹与管理, 2008, 17 (3): 134-139.
Yan W, Li S R. Optimal portfolio with exchange rate based on discontinuous price process [J]. Operations Research and Management Science, 2008, 17 (3): 134-139. (in Chinese)

[26] 程瑶, 于津平. 人民币汇率波动对外商直接投资影响的实证分析 [J]. 世界经济研究, 2009, (3): 75-82.
Cheng Y, Yu J P. RMB exchange rate fluctuations on foreign direct investment empirical analysis [J]. World Economy Study, 2009, (3): 75-82. (in Chinese)

[27] 孙文莉, 金华. 汇率的不确定性、投资区位选择与公司内贸易 [J]. 南方经济, 2010, (6): 65-74.
Sun W L, Jin H. The exchange rate uncertainty, location-decision of FDI and intra-firm trade [J]. South China Journal of Economics, 2010, (6): 65-74. (in Chinese)

[28] Azman-Saini W N W, Lau E, Karim Z A. Hedge funds, exchange rates and causality: Evidence from Thailand and Malaysia [J]. Applied Economics Letters, 2010, 17 (4): 393-397.

[29] Kahneman D H, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision making under risk [J]. Econometrica, 1979, 47 (2): 263-292.

[30] Berkelaar A B, Kouwenberg R, Post T. Optimal portfolio choice under loss aversion [J]. The Review of Economics and Statistics, 2004, 86 (4): 973-987.

[31] Basak S, Shapiro A. Value-at-risk based risk management: optimal policies and asset prices [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14 (2): 371-405.

附录：命题 3-4 的证明

命题 3 证明

利用 Basak 和 Shapiro^[31] 求解非标准动态规划问题的方法证明命题, 先将式 (9) 的 Legendre-Fenchel 变换定义为

$$\bar{V}^*(\xi(T)) = \max_{Y(T) \geq 0} \{ \bar{V}(Y(T)) - y\xi(T)Y(T) \}$$

其中, I 为符号函数。由于 $\bar{V}(Y(T))$ 是分段函数, 将对冲基金的价值 $Y(T)$ 低于基准 $H(T)$ 的那段值函数用 $\bar{V}_1(Y(T))$ 来表示, 高于基准 $H(T)$ 的部分用 $\bar{V}_2(Y(T))$ 。 $Y_j^*(T)$ 表示值函数 $\bar{V}_j(Y(T))$ 的最优财富, $j=1, 2$ 。

当 $Y(T) \leq H(T)$ 时, 值函数 $\bar{V}_1(Y(T))$ 是凸的。因此, $Y_1^*(T)$ 应该取两个端点值之一, 即 $Y_1^*(T) = 0$ 或者 $Y_1^*(T) = H(T)$ 。当 $Y(T) > H(T)$ 时, 值函数 $\bar{V}_2(Y(T))$ 是凹的, 那么 $Y_2^*(T)$ 应满足下面的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件

$$\begin{aligned} \bar{V}'_2(Y_2^*(T)) &= y\xi(T) - \lambda, \quad Y_2^*(T) \geq 0 \\ \lambda Y_2^*(T) &= 0, \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

式中, λ 为与对冲基金价值非负约束相关的拉格朗日乘子。求解上面的 KKT 条件, 得

$$Y_2^*(T) = H(T) + \left(\frac{\gamma_2}{y\xi(T)} \right)^{1/(1-\gamma_2)}$$

现在比较局部最大值 $Y_1^*(T)$ 与 $Y_2^*(T)$ 从而确定全局最大值。令:

$$f(\xi(T)) = \bar{V}(Y_2^*(T)) - y\xi(T)Y_2^*(T) - [\bar{V}(Y_1^*(T)) - y\xi(T)Y_1^*(T)] \geq 0$$

那么, $Y_2^*(T)$ 就是最优解。

比较 $Y_2^*(T)$ 和 $Y_1^*(T) = H(T)$, 得

$$f(\xi(T)) = \gamma_2 \frac{1-\gamma_2}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_2}{y\xi(T)} \right)^{\gamma_2/(1-\gamma_2)}$$

因为 $y > 0$ 且 $0 < \gamma_2 < 1$, 所以对于所有的 $\xi(T)$, $f(\xi(T)) > 0$ 恒成立。因此, $Y_1^*(T) = H(T)$ 不可能是最优解。

比较 $Y_2^*(T)$ 和 $Y_1^*(T) = 0$, 得

$$f(\xi(T)) = \gamma_2 \frac{1-\gamma_2}{\gamma_2} \left(\frac{\gamma_2}{y\xi(T)} \right)^{\gamma_2/(1-\gamma_2)} - y\xi(T)H(T) + A^*(H(T))^{\gamma_1}$$

由于 $A^* > 0$, $y > 0$ 且 $0 < \gamma_2 < 1$, 容易得到对于所有的 $\xi(T)$, $f'(\xi(T)) < 0$ 恒成立。所以函数 $f(\xi(T))$ 是严格减函数。很容易验证当 $\xi(T) \leq \frac{A^*}{y}(H(T))^{\gamma_1-1}$ 时, $f(\xi(T)) > 0$, 而且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 。因此, 可以推断方程 $f(\xi(T)) = 0$ 在区间 $\left(\frac{A^*}{y}(H(T))^{\gamma_1-1}, +\infty \right)$ 内存在唯一解。并假设这个唯一解为 ξ^* 。因为函数 $f(\xi(T))$ 是严格减函数, 所以当 $\xi(T) < \xi^*$ 时, $f(\xi(T)) > 0$; 当 $\xi(T) \geq \xi^*$ 时, $f(\xi(T)) \leq 0$ 。因此, 当 $\xi(T) < \xi^*$ 时, $Y_2^*(T)$ 是最优解; 当 $\xi(T) \geq \xi^*$ 时, $Y_1^*(T) = 0$ 为最优解。证毕。

命题 4 证明

首先证明 $t(0 \leq t < T)$ 时刻对冲基金的最优价值 $Y^*(t)$, 因为 $\xi(t)Y^*(t)$ 是个鞅。于是:

$$Y^*(t) = \frac{1}{\xi(t)} E_t[\xi(T)Y^*(T)]$$

得

$$Y^*(t) = \frac{1}{\xi(t)} E_t \left[\xi(T) \left(H(T) + \left(\frac{y\xi(T)}{\gamma_2} \right)^{1/(\gamma_2-1)} \right) I_{|\xi(T) < \xi^*|} \right]$$

其中, I 为符号函数。由于资产价格服从几何布朗运动, 所以 $\lg\xi(T)$ 是服从均值为 $\lg\xi(t) - \left(r + \frac{1}{2}\kappa^2 \right) (T-t)$ 、方差为 $\kappa^2(T-t)$ 的正态分布。直接的推导就可以得到式 (12)。

将式 (12) 重写为随机微分方程的形式, 并且利用它的扩散部分应与式 (2) 的扩散部分完全相同, 得到在风险资产投资比例的精确表达式。

为了方便陈述, 定义 t 时刻对冲基金的价值为 $Y^*(t) = F(t, \xi(t))$, 利用伊藤公式和式 (10), 得

$$dY^*(t) = G(t, \xi(t)) dt - \frac{\partial F(t, \xi(t))}{\partial \xi(t)} \xi(t) \kappa dB(t)$$

其中, $G(t, \xi(t))$ 表示漂移部分, 对冲基金价值同时服从式 (2)。比较上式与式 (2) 的扩散部分, 得

$$-\frac{\partial F(t, \xi(t))}{\partial \xi(t)} \xi(t) \kappa = \sigma(t) \omega^*(t) Y(t)$$

即

$$\omega^*(t) = -\frac{\sigma^{-1}\kappa \left(\frac{\partial F(t, \xi(t))}{\partial \xi(t)} \xi(t) \right)}{Y(t)}$$

再将式 (12) 代入上式可得式 (11)。证毕。

Optimal Investment Strategies of Hedge Funds under Random Exchange Rates

Fei Weiyin, Zhang Fanhong, Li Yunhe

Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China

Abstract: Based on the framework of prospect theory, this paper investigates the impacts of exchange rates on optimal investment strategies of a hedge fund manager with incentive fees. First, through Itô formula we derive the dynamics of risky assets prices denoted by the native currency under random exchange rates. Then, under maximizing the manager's expected utility of the terminal wealth converted by the exchange rate, through using the martingale methodology, the optimal investment strategy is obtained. Finally, we quantitatively analyses the impacts of the exchange rate, incentive fees and the manager's own stake in the fund on the optimal investment strategy of a hedge fund manager through a numerical simulation.

Key words: Hedge funds; Random of exchange rate; Incentive fees; martingale methodology; optimal portfolio