

非完全市场下基于 CARA 效用函数的企业投资与融资策略^①

杨金强, 彭涓

(上海财经大学 金融学院, 上海 200433)

摘要: 本文考虑一个面临经营性风险 (非完全市场) 的创业企业家, 在给定的税收政策下, 通过选择最优的融资策略, 平滑消费、实业与金融投资, 解决实现消费效用最大化的这一公司金融问题, 得到了企业家权益价值和投资期权价值的半闭式解及相应的最优投融资策略。理论和数值计算结果表明, 非完全市场下企业家的风险厌恶态度对融资策略、投资期权价值和实业投资策略等都具有显著的影响。

关键词: 风险厌恶; 下行风险; 上行风险; 实业投资

中图分类号: D92; E22; G12 **文献标识码:** A **文章编号:** (2018) 01-0011-11

0 引言

20 世纪 80 年代中后期, “企业家^②经济” 在欧美发达国家中兴起, 新兴的中小企业大量涌现, 并在经济中占据日益突出的地位。在这些新兴的中小企业中, 创业型中小企业^③是最为重要的组成部分。创业型企业作为国民经济的一支重要力量, 在优化资源配置、稳定经济增长、增加居民收入、促进社会稳定、增强创新活力等方面发挥着越来越重要的基础性支撑作用。

投融资决策是企业理财活动的两大部分, 其决策的科学性直接关系到企业的业绩和经营的可持续性, 从而受到学术界与实物界的长期关注, 其开创性工作始于 Modigliani 和 Miller 对企业融资与投资基本理论的研究^[1]。随后, Jensen 和 Meckling 放松了一系列的严格假设, 通过引入税收利益、破产成本以及代理冲突等因素, 对企业投融资决策的相互影响进行深入的研究^[2]。具有里程碑意义的是, Myers 直接分析投融资互动下的资本预算问题, 从而揭开了投融资互动关系研究的新篇章^[3]。之后的相关研究以此为基础进行多元化扩展, 如 Mello 和 Parsons 研究实物投资和破产决策与债务评估相互作用的相机权益模型^[4]。Leland 在假设资产价值服从几何布朗运动的基础上, 研究内生的企业破产机制、资本结构、代理成本和风险管理等问题^[5], Mauer 和 Sarkar 则分析了负债代理冲突下的初始投融资行为, 并重点分析以代理成本为中介的投融资决策的动态关系^[6]。DeMarzo 等研究了基于动态契约下的最优投资理论^[7]。而 Bolton 等分析了风险中性下公司以现金/信贷为融资途径的最优投融资和风险管理^[8]。Bolton 等在假设企业面临随机的外部融资成本的前提下, 通过构建投资的托宾 Q 理论模型, 得出了企业的发股、分红和投资的最优择时。我国学者简志宏和李楚霖、刘向华和李楚霖讨论了杠杆公司的破产决策和债务重组问题^[9,10], 刘星和彭程则利用实物期权的方法分析创业企业投融资决策之间相互影响、共生互动的关系^[11]。曾爱民和魏志华利用中国上市公司的经验证据, 发现企业的投资-现金流敏感性在融资约束较大的情况下与财务柔性水平正相关, 在融资约束较小的情况下则与财务柔性水平负相关^[12]。邓可斌和曾海舰通过实证研究发现融资约束与公司股票收益正相关, 并且融资约束会引致企业特质风险的增加、主导小规模效应、促

① 基金项目: 国家自然科学基金项目 (71522008, 71772112); 霍英东教育基金会第十五届高等院校青年教师基金基础性研究课题 (151086)。

作者简介: 杨金强 (1983—), 男, 河北衡水人, 博士, 上海财经大学金融学院教授, 博士生导师, 证券期货系主任, 研究方向: 动态公司金融, E-mail: huda518@163.com; 彭涓 (1986—), 女, 湖南湘乡人, 上海财经大学金融学院博士后, 研究方向: 公司金融与资产定价, E-mail: penjuan527@163.com。

② 在现代企业中企业家大体分为两类, 一类是企业所有者企业家, 作为所有者他们仍从事企业的经营管理工作; 另一类是受雇于所有者的职业企业家。大多数情况下 (包括本文), 企业家只指第一种类型, 而把第二种类型称作职业经理人。

③ 本文提到 “创业型中小企业” “创业企业” “创业型企业” 均指成长性好、风险高的中小企业。

使企业生产效率提升^[13]。喻坤等则从融资约束和货币政策的角度来研究我国的投资效率问题^[14]。

然而，上述研究都是基于风险中性下的定价，本质上沿袭了经典的“金融资产定价等于现金流贴现和”的理论，因而忽视了投资者的风险态度在投融资决策和资产定价中的决定作用。实际上，对于创业企业的权益所有者（企业家）来说，往往面临着不可对冲的经营性风险（非完全市场）。众所周知，在非完全市场条件下，投资者的风险态度对投融资决策与项目价值评估具有重要的影响，始终坚持在风险中性条件下讨论这些问题显然是不科学的。针对上述经典公司金融模型的“风险中性假设”的缺陷，本文研究企业家在非完全市场下通过甄选融资水平、控制实业投资规模、平滑消费、选择破产/套现以及金融市场的投资组合来最大化无限期内的消费总效用的经营决策问题。Henderson 首次采用实物期权理论来分析非完全市场下的企业价值评估和投资^[15]，随后 Miao 和 Wang 研究了非完全市场下的创业企业家的投资、消费与风险对冲^[16]。Quadrini 探析了借贷约束和非系统风险（非完全市场）对创业企业家投资储蓄及职业选择的影响^[17]。Chen 等则考虑非完全市场下的创业企业家的投资、融资、消费及破产/套现问题^[18]。Sorensen 等和 Liu 等利用实物期权理论研究私募股权投资的估值和最优股权结构等问题^[19,20]。上述文献都是基于 CARA 效用函数来研究非完全市场下的投融资决策，但他们假设创业投资之后企业的收益流是外生给定的（即一个服从几何布朗运动的状态变量），而本文假设企业具有“AK”类型的生产方式，即企业家可以通过调整创业企业的资本存量控制企业的产出。值得提出的是，Wang 等研究非完全市场下企业家的消费、实业/金融投资及定价问题，但是为保持模型的易操作性和解的简洁性，没有考虑企业的风险融资问题^[21]。

1 经济建模

1.1 创业企业的初始启动

假设初始时刻（即 $t=0$ ）“意愿”企业家（would-be entrepreneur，下文有时简称“企业家”）具有 W_0 的财富总量，同时他还拥有一个排他型的创业投资机会/创意（后文将对相应的投资生产技术及资本积累方式进行详细刻画）^①。该创意是他的专有性资产，只有在他的亲自主导下才能被实施。创业企业的初始启动（创意的实现）需要支付一次性的沉没成本，定义为 Φ 。假设企业家在 T^0 时刻决定开始创办企业的同时，可以选择企业的初始规模（即企业的资本存量 K_{T^0} ）。同时，本文假设“意愿”企业家在创业投资之前做普通工人。Hamilton 发现企业家的收入波动性高于普通工人的收入波动性^[22]，同时企业家在承受更多风险的同时比普通工人拥有更高的平均收益率。对此，为突显企业家与普通工人之间的收入差异性，我们假设工人具有恒定的工资收入 $r\Pi$ （ r 为无风险利率），即“意愿”企业家在拥有创业投资机会的同时还拥有一个外部期权（做普通工人），外部期权的价值（工人收益流的现值）为 Π 。

1.2 企业家创意：实业资本投资与生产技术

假设创业投资之后，该创业企业利用实物资本进行生产，不失一般性，设资本的正规化价格为 1。定义 K 为企业的资本存量， I 为单位时间内有效资本投资数量。假定企业资本存量服从如下的随机扩散过程^[23-25]：

$$dK_t = (I_t - \delta K_t)dt + \sigma_K K_t dZ_t^K \tag{1}$$

式中， δ 为单位时间内的资本折旧率； σ_K 为资本波动率； Z_t^K 为标准的布朗运动。进一步假设企业具有“AK”类型的生产方式^②，即企业的营业收入 dY 取决于毛产出减去资本投资支出：

$$dY_t = (AK_t - G(I_t, K_t))dt \tag{2}$$

① 在这里可以看作投资者拥有一个投资实物期权。

② 即企业的产出仅依赖于资本存量和单位资本的产出率，“AK”中的“A”表示单位资本的产出率，“K”表示企业的资本存量。“AK”类型的生产函数在经济学及公司金融中有着广泛的应用。基于“AK”生产技术，Cox 等研究一般均衡经济理论^[26]，Jones 和 Manuelli 做出内生经济增长的实证分析^[27]，Eberly 和 Wang 分析资本重组与增长^[28]，Bolton 等研究公司投融资与风险管理^[8]。

式中, A 用以测度单位资本的产出率, 本文假设为常数; $G(I, K)$ 为资本调整成本函数, 表示买入/卖出资本的基础价格成本和投资摩擦所导致的额外投资费用 (比如调整成本)。在经典的投资理论文献中^[29], 资本调整成本函数是投资数量 I 与资本存量 K 的一阶齐次函数^① $[G(I, K)]$, 一般具有如下齐次形式:

$$G(I, K) = g(i)K \quad (3)$$

其中, $i = I/K$ 为实业投资-资本比; $g(i)$ 是单调递增的凸函数。在本文中我们假设 $g(i)$ 为二次函数^[8]:

$$g(i) = i + \frac{\theta}{2}i^2 \quad (4)$$

其中, 右侧第一项为资本的基本成本, 第二项为额外的资本调整成本, 其中参数 $\theta > 0$ 测度实业投资中比例调整成本的强度, θ 越大意味着市场的非流动性越强。

1.3 金融投资

假设金融市场中存在无风险资产及一个风险资产 (如某个投资组合, 下称市场投资组合), 其中无风险利率为 r , 市场投资组合价格 M_t 服从以下扩散过程:

$$dM_t/M_t = \mu_m dt + \sigma_m dZ_t^M \quad (5)$$

式中, μ_m 与 σ_m 为常量, 分别表示市场投资组合的回报率与波动率; Z_t^M 为标准的布朗运动, 且 Z_t^M 与 Z_t^K 之间的相关系数为 ρ ($|\rho| \leq 1$)。定义 $\eta = (\mu_m - r)/\sigma_m > 0$ 为金融市场的夏普比率 (sharpe ratio)。记 X_t 为企业家在市场资产组合的投资额。

1.4 融资与破产/套现

假设企业家可以通过外部债务融资进行创业, 且借款合同在投资之前事先签订。债务合约规定, 债权人必须为创办企业提供数额为 Ω 的一次性永久贷款; 企业家必须向债权人支付相应的债务利息 Δ 。假定在初次借款后, 企业不能再调整其债务水平, 因此企业不存在利用新债支付到期债务利息流。当企业经营不善时, 企业家对企业实施破产, 一旦破产, 企业家必须将企业的所有权转移给债权人, 企业家的权益也因此变为零, 此时的企业相当于债权人拥有的纯股本企业。假设破产或套现过程, 仅仅是从杠杆企业变成无杠杆 (纯股本) 企业的过程, 其他外部环境并不发生改变, 如企业生产技术, 产出模式, 所得税率, 企业资本等。假设企业破产成本的大小为破产阈值下纯股本企业价值的 h_d ($0 \leq h_d < 1$) 部分 (Mauer 和 Sarkar^[6]、Childs 等^[32], 以及刘星和彭程^[11] 也有相同的假定), 所以破产后的债权人拥有纯股本企业价值扣除企业破产成本后的残值。而当企业规模过大时, 企业家由于不想承担过高的非系统风险可以把企业转让给债权人或其他风险中性的投资者进行套现, 假设企业套现成本的大小为套现阈值下纯股本企业价值的 h_u ($0 \leq h_u < 1$) 部分, 套现后企业家必须一次性向债权人还清债务 Δ/r 。假设套现之后, 企业家可以重新做普通工人, 但破产之后企业家失去了做普通工人的权利, 即企业家被强迫退休, 再无工资收入。由此可见, 无论破产还是套现, 都是企业家拥有的一种权利, 即破产/套现之前企业家拥有一个看涨的套现期权和一个看跌的破产期权。

因此, 创业企业的总资产的归属人有两种: 内部权益者 (企业家) 与外部债权人。相应地, 创业企业的价值也可以分为两部分: 企业家权益价值与债权人债务价值。

1.5 税盾

Graham 认为, 企业通过借债实现税盾价值^[33], 大概等于企业价值的 10%。在模型中, 我们只考虑一个简单的税收环境, 即有效 Miller 税率, 定义为 τ , 它包含企业所得税和个人所得税及利息税, 假设有效 Miller 税率与企业盈利是线性关系。一般创业型企业与上市企业, 以及创业企业的破产/套现前后都可能有不同的所得税率^[18]。在这里我们假设所有类型的企业都具有统一的税率。

1.6 消费及财富动态

企业家通过消费获取效用, 定义 C_t 、 $U(C_t)$ 分别为 t 时刻的消费及消费效用。因此, 在企业正常运营阶段, 企业家的流动性 (金融) 财富过程 W_t 满足如下动态过程:

① Lucas 和 Prescott、Abel 和 Blanchard 也都具有相同的假设^[30,31]。

$$dW_t = r(W_t - X_t)dt + X_t(\mu_m dt + \sigma_m dB_t) - C_t dt + (1 - \tau)(dY_t - \Delta dt) \quad (6)$$

式中, τ 为有效 Miller 税率; B 为布朗运动; X 为投资在风险资产的额度。右侧第一项与第二项表示无风险资产与市场投资组合的收益, 第三项表示消费支出, 第四项是企业家的税后净营业收入。而当企业实行套现之后, 或者创业投资之前, 其财富动态表现为

$$dW_t = r(W_t - X_t)dt + X_t(\mu_m dt + \sigma_m dB_t) - C_t dt + rII dt \quad (7)$$

破产之后的财富动态为

$$dW_t = r(W_t - X_t)dt + X_t(\mu_m dt + \sigma_m dB_t) - C_t dt \quad (8)$$

1.7 企业家的目标

直觉上, 当企业资本存量过低时企业的营业收入也会降低, 如果继续经营企业会出现资不抵债, 所以在资本降到某一阈值 (假设为 \underline{K}) 时企业家会及时对企业进行破产。若当企业资本存量过高时企业家承担过高的非系统风险, 理性的企业家在资本升到某一阈值 (假设为 \bar{K}) 时会及时对企业实施套现。企业家作为整个企业权益所有者从事企业的经营管理工作, 他的目标是根据当前的企业资本存量、自身的流动性财富水平, 通过选取最优消费策略 C_t , 实业投资策略 I_t , 金融投资策略 X_t 以及最优的破产决策/套现决策 (即确定阈值 \underline{K} 和 \bar{K}) 来最大化如下无限期内期望消费总效用 (值函数) $[J(K, W)]$ ^①:

$$J(K, W) = \max_{C_u, I_u, X_u, T^*} E_t \left\{ \int_t^\infty e^{-ru} U(C_u) du \right\}, \quad T^0 < t < T^* \quad (9)$$

其中, T^* 为最优的破产/套现时刻。

假设“意愿”企业家在创业投资之前任何时刻, 都可以进行创业投资成为企业家, 即他拥有一个永久美式期权。如前文所假设, 在实施投资期权之前, 他先从事普通工人的职业, 单位时间内的工资收入为 rII 。一旦进行创业投资, 则马上中断工人角色及相应的工资收入进入企业家角色, 且获取企业经营的税后收益。定义 $F(W; K)$ 为“意愿”企业家进行投资创业投资之前的值函数, 则它具有如下形式:

$$F(W_t; K_{t^0}) = \max_{C, X, T^0, K_{t^0}} E \left[\int_t^{T^0} e^{-r(s-t)} U(C_s) ds + e^{-r(T^0-t)} J(K_{T^0}, W_{T^0}) \right], \quad t < T^0 \quad (10)$$

为简化和明晰研究思路, 可以把企业家处于的状态分为三个阶段: 创业投资之前, 创业企业的正常运营 (创业投资之后破产/套现之前), 破产/套现之后。

2 模型求解

2.1 最优性条件

利用标准的动态最优控制原理, 当 $K \in (\underline{K}, \bar{K})$ 时可得值函数 J 满足下面的哈密尔顿-雅可比-贝尔曼方程:

$$rJ = \max_{C, I, X} \left\{ U(C) + (rW + X(\mu_m - r) - C + (1 - \tau)(AK - G(I, K) - \Delta))J_W + (I - \delta K)J_K + \frac{\sigma_m^2 X^2 J_{WW} + 2\rho\sigma_m\sigma_K XKJ_{WK} + \sigma_K^2 K^2 J_{KK}}{2} \right\} \quad (11)$$

式 (11) 类似于资产定价公式, 表示值函数的期望改变率 (左侧) 等于瞬时消费效用 (右侧第一项) 与其他各状态变量总的期望改变率 (右侧其他项) 之和。利用最优消费策略 C , 实业投资策略 I 及金融投资策略 X 的一阶优化条件, 可得

^① 其中还要求投资消费满足可积条件 $\int_0^t C_t^2 < +\infty$, $\int_0^t I_t^2 < +\infty$, $\int_0^t X_t^2 < +\infty$, 这些条件从数学上保证了模型计算有意义, 经济学上意思是禁止恶意透支。

$$U'(C) = J_W, \quad J_K = (1 - \tau)G_I J_W, \quad X = -\frac{\eta}{\sigma_m} \frac{J_W}{J_{WW}} - \frac{\rho\sigma_K}{\sigma_m} \frac{KJ_{WK}}{J_{WW}} \quad (12)$$

式 (12) 中的第一个表达式表示最优策略应使边际消费效用等于财富的边际效用。第二个表达式表示企业资本投资的边际成本等于边际收益。在第三个表达式中, 右侧第一项均值方差 (mean-variance) 动机与第二项的套期保值 (hedge) 动机共同决定企业家的金融投资策略。当套现之后, 企业家重新做工人, 而当企业破产之后, 企业家被迫退休再无工资收入。此后, 最优化问题变为一个标准的 Merton 最优投资消费问题, 定义其值函数为 $V(W)$ 。

下面我们来分析各阶段值函数的边界条件。在创业投资前后的瞬间, 企业家的流动性财富变化为 $W_{70+} = W_{70-} - (K_{70+} - \Omega) - \Phi$, 利用值函数的价值匹配条件可得

$$J(K, W - (K - \Omega) - \Phi) = F(W; K) \quad (13)$$

然后再利用最优化问题的平滑粘贴条件可得

$$J_W(K, W - (K - \Omega) - \Phi) = F_W(W; K), \quad J_K(K, W - (K - \Omega) - \Phi) = F_K(W; K) \quad (14)$$

企业破产前后的瞬间, 值函数的价值匹配和最优化问题的平滑粘贴条件为

$$V(W) = J(W, \bar{K}), \quad V_W(W) = J_W(\bar{K}, W), \quad 0 = J_K(\bar{K}, W) \quad (15)$$

在企业家套现前后的瞬间, 企业家的流动性财富变化为 $W_{t+} = W_{t-} + (1 - h_u)Q(K_{t-}) - \Delta/r$, 其中, $Q(K)$ 为债权人 (或风险中性投资者) 接管企业进行重组后的纯股本企业的价值。进一步可得企业套现前后的瞬间, 企业家值函数的价值匹配条件为

$$J(W, \bar{K}) = V(W + (1 - h_u)Q(\bar{K}) - \Delta/r + \Pi) \quad (16)$$

然后再利用最优化问题的平滑粘贴条件可得

$$J_W(W, \bar{K}) = V_W(W + (1 - h_u)Q(\bar{K}) - \Delta/r + \Pi), \quad J_K(W, \bar{K}) = V_K(W + (1 - h_u)Q(\bar{K}) - \Delta/r + \Pi) \quad (17)$$

2.2 CARA 效用函数下模型的解

一般来说, 常相对风险厌恶 (constant relative risk aversion, CRRA) 效用函数比较受经济学欢迎, 但在分析多维变量的经济学问题时, 常绝对风险厌恶 (constant absolute risk aversion, CARA) 效用函数在降维方面具有显著优势。本文为简化问题而又不失突出本文的研究主旨, 采用 CARA 效用, 即指数类效用函数

$$U(C) = -(e^{-\gamma C} - 1)/\gamma \quad (18)$$

式中, 参数 γ 表示企业家的风险厌恶系数。则得破产/套现之后企业家的价值函数为^①

$$V(W) = -\frac{e^{-\gamma r \left(W + \frac{\eta^2}{2\gamma r^2} \right)} - 1}{\gamma r} \quad (19)$$

通过猜测-验证的方法, 可得企业经营期间的值函数有如下形式:

$$J(K, W) = -\frac{e^{-\gamma r \left(W + E(K) + \frac{\eta^2}{2\gamma r^2} \right)} - 1}{\gamma r} \quad (20)$$

式中, $E(K)$ 是企业家权益的价值, 实际上它也可以解释为企业家权益的消费效用无差别价值^②或者确定性等价财富 (certainty equivalent wealth)。通过猜测-验证的方法, 可得“意愿”企业家创业投资之前的值函数有如下形式:

$$F(W) = -\frac{e^{-\gamma r \left(W + \Pi + S(K^*) + \frac{\eta^2}{2\gamma r^2} \right)} - 1}{\gamma r} \quad (21)$$

① 见参考文献 [16]。

② 见参考文献 [16]。

式中, K^* 是创业企业的最优初始规模; $S(K^*)$ 是创业投资期权 (实物期权) 的价值, 实际上它也可以解释为实物期权的消费效用无差别价值。我们可以用下面的定理来总结本文的主要结论^①。

定理 1 如果企业家面临着不可分散的经营性风险, 则企业家权益的价值 $E(K)$ 满足下面的自由边界非线性常微分方程 (ODE):

$$rE(K) = (1 - \tau)(AK - \Delta) + \frac{1 - \tau}{2\theta} \left(\frac{E'(K)}{1 - \tau} - 1 \right)^2 K - (\rho\eta\sigma_k + \delta)KE'(K) + \frac{\sigma_k^2 K^2 E''(K)}{2} - \frac{\gamma r(1 - \rho^2)\sigma_k^2 K^2 E'(K)^2}{2} \quad (22)$$

且具有如下边界条件:

$$E(\underline{K}) = 0, E'(\underline{K}) = 0, E(\bar{K}) = (1 - h_u)Q(\bar{K}) - \frac{\Delta}{r} + \Pi, E'(\bar{K}) = (1 - h_u)Q'(\bar{K}) \quad (23)$$

最优消费、实业投资及金融投资策略分别为

$$C = r \left(W + E(K) + \frac{\eta^2}{2\gamma r^2} \right), \quad i = \frac{1}{\theta} \left(\frac{E'(K)}{1 - \tau} - 1 \right), \quad X = \frac{\eta}{\gamma\sigma_m} \frac{1}{r} - \frac{\rho\sigma_k}{\sigma_m} KE'(K) \quad (24)$$

现在, 本文对以上结果进行简单的分析: 首先式 (22) 中的最后一项直接体现了非完全市场下风险态度对企业家权益价值的影响。在非风险中性条件下, 风险厌恶系数 γ 或者非系统风险 $(1 - \rho^2)\sigma_k^2$ 越大, 企业家权益的价值越小。最优消费策略表明最优消费恰好为企业家的所有财富产生的无风险“利息收入”, 这些财富包括流动性财富 W 、企业家权益价值 $E(K)$, 隐含的金融风险投资的超额收益 $\eta^2/(2\gamma r^2)$, 最优投资策略应使投资资本的边际成本等于边际收益, 最优市场投资组合策略表明具有相关性的金融风险资产可以部分对冲企业家的经营性风险。

下面, 用定理 2 总结关于债权人债务价值的主要结果。

定理 2 企业破产/套现之前债权人债务的价值 $D(K)$ 满足下面的自由边界常微分方程:

$$rD(K) = \Delta + (i(K) - \delta - \rho\eta\sigma_k)KD'(K) + \frac{\sigma_k^2 K^2 D''(K)}{2} \quad (25)$$

其中, $i(K)$ 为式 (24) 所给定, 式 (25) 应满足如下的边界条件:

$$D(\underline{K}) = (1 - h_d)Q(\underline{K}), \quad D(\bar{K}) = \Delta/r \quad (26)$$

破产/套现之后, 纯股本企业的价值为 $Q(K) = q^{CM}K$ 。其中 q^{CM} 表示托宾 Q , 为

$$q^{CM} = (1 - \tau)(1 + \theta i^{CM}) \quad (27)$$

其中, i^{CM} 是完全市场下企业的最优实业投资策略, 为

$$i^{CM} = (r + \delta + \rho\eta\sigma_k) - \sqrt{(r + \delta + \rho\eta\sigma_k)^2 - 2(A - (r + \delta + \rho\eta\sigma_k)/\theta)}$$

下面我们用定理 3 总结创业投资期权的价值以及“意愿”企业家的决策。

定理 3 创业投资之前, “意愿”企业家的创业投资期权的价值 $S(K^*)$ 为

$$S(K^*) = E(K^*) - (K^* - D(K^*)) - \Phi - \Pi \quad (28)$$

其中, K^* 为创业企业的最优初始规模, 满足下面的方程:

$$E_K(K^*) = 1 - D_K(K^*) \quad (29)$$

“意愿”企业家的最优消费与市场投资组合策略分别为

$$C(K^*) = r(W + \Pi + S(K^*)), \quad X(K) = \frac{\eta}{\gamma\sigma_R} \frac{1}{r} \quad (30)$$

“意愿”企业家在创业投资之前的任何时刻执行该投资期权都是无差别的。

上文给出在既定融资政策 Δ 下的投资及破产/套现决策, 然而融资决策同时也受投资及破产/套现决策的影响, 它们之间是协同互动的^[5,10]。即投资与破产/套现决策的优化必须以当前既定融资策略为基础, 而融资决策的进行又必须考虑到未来的投资与破产/套现方案, 同时, 破产/套现方案又直接依赖于当前的

① 由于篇幅所限, 本文证明细节略。

债务水平，且受投资决策的影响，投融资与破产/套现决策之间存在一种相互依存、相互作用的共生互动的关系，三者的优化过程就是彼此动态适应与协同的过程。

显然，若不考虑未来可能的投资与破产/套现策略，企业家将无法估计自身权益的价值，最终使企业的融资决策无从着手。事实上，无论怎样的融资政策 Δ ，企业家都会选择一个特定的投融资与破产/套现方案。只要了解了既定融资状态下所有策略，企业家就能知道创业投资期权价值。此时，企业家的目标将是选择一个最优的融资策略 Δ^* 以最大化创业投资时刻自身权益的价值。所以，企业家甄选能使 $S(K^*)$ 最大化的融资策略，因而最优债务融资策略 Δ^* 必须满足：

$$\Delta^* = \underset{\Delta}{\operatorname{argmax}} S(K^*; \Delta) \quad (31)$$

企业家融资的目的是通过付出融资成本（破产以及潜在的代理冲突）获取融资收益（税收节约），因此我们也可以通过创业企业的资本结构来研究企业家对融资成本与融资收益之间的权衡行为，定义 L 为企业的财务杠杆，即

$$L(K) = \frac{D(K)}{Q(K)} \quad (32)$$

式中， $Q(K)$ 为创业企业的总价值，即 $Q(K) = E(K) + D(K)$ ，财务杠杆为债务价值占创业企业总价值的比例，该指标反映了不确定性环境下的财务风险和杠杆选择，便于我们分析非完全市场对企业资本结构的影响。标准的公司金融理论认为，企业家可以完全分散企业的经营性风险，资本定价不受非系统风险的影响，所有企业具有一致的资本结构，显然，这与实际并不相符，而本文则得到了动态的资本结构。

下面，我们利用非完全市场下的数值结果对其进行经济学解释分析。

3 数值结果分析

3.1 参数选择

在本文的数值分析中，所有参数的时间标度都是年。无风险利率 $r = 4.6\%$ ，市场风险溢价 $\mu_m - r = 6\%$ [34]，市场投资组合的波动率 $\sigma_m = 0.2$ ，相应的市场夏普比 $\eta = (\mu_m - r) / \sigma_m = 30\%$ 。在实业投资方面，本文模型是对经典托宾 Q 投资理论的拓展研究 [29]，通过参考 Eberly 等利用 Compustat 的 1981 ~ 2003 年的数据对 Hayashi 1982 年的投资模型进行的实证分析结果 [35]，我们选择如下的参数：期望产出率 $A = 0.2$ ，资本存量波动率 $\sigma_k = 8\%$ 。摩擦系数 $\theta = 2$ ①，企业资本折旧率 $\delta = 12.5\%$ 。而其他参数如下：企业的破产成本参数为 $h_d = 50\%$ ，企业的套现成本参数为 $h_u = 20\%$ ，有效 Miller 税率 $\tau = 11.29\%$ [33, 39] ②。初创企业的沉没成本 $\Phi = 0$ ，从事工人职业的工资收入的现值 $\Pi = 1$ 。且为便于分析非完全市场下的税盾价值，我们还给出了 $\tau = 0$ 的同步结果。最后，我们选取两种相对风险厌恶系数： $\gamma = 1, 2$ 。此外，不失一般性我们假设金融市场投资组合的波动与企业家的经营性风险无关，即 $\rho = 0$ 。

3.2 数值结果分析

现在来分析非完全市场对创业企业资本结构的影响。在表 1 中我们主要通过比较在企业初创时刻（即 T^0 时刻）不同有效 Miller 税率和风险态度下的最优融资策略 Δ^* ，最优初始规模 K^* ，创业投资期权价值 $S(K^*)$ ，企业家权益的价值 $E(K^*)$ ，债权人的债务价值 $D(K^*)$ ，创业企业的价值 $Q(K^*)$ 以及企业的财务杠杆 $L(K^*)$ 来分析非完全市场的影响。

① $\theta = 2$ 是一个非常合理的参数，见参考文献 [35 ~ 38]。

② 这里的有效 Miller 税率主要为企业所得税和企业家的个人所得税这两种税率的加权值，而企业家的个人所得税又分为企业家权益的个人所得税与利息税。一般来讲，利息税率为 0.30，企业所得税为 0.31，权益的个人所得税为 0.10，利用 Miller 加权计算公式可得有效 Miller 税率为 11.29%。

表 1 风险厌恶态度和税收对融资策略、企业初始规模、企业财务杠杆及各种价值评估的影响
 Table 1 The impact of risk aversion attitude and taxation on financing strategy, initial size of firm, corporate financial leverage and various valuations

| τ | γ | Δ^* | K^* | $S(K^*)$ | $E(K^*)$ | $D(K^*)$ | $Q(K^*)$ | $L(K^*)$ |
|--------|----------|------------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 1 | 0 | 166.50 | 13.88 | 181.39 | 0 | 181.39 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 83.25 | 6.44 | 90.69 | 0 | 90.69 | 0 |
| 11.29% | 1 | 0.18 | 52.97 | 1.78 | 52.17 | 3.58 | 55.75 | 6.42% |
| 11.29% | 2 | 0.09 | 26.47 | 0.39 | 26.07 | 1.79 | 27.86 | 6.43% |

当有效 Miller 税率为 0 时，企业家无融资动机，因此企业的最优融资策略为 $\Delta^* = 0$ ，此时创业企业为纯股本企业，企业的财务杠杆自然为 0。在企业初创时刻，当企业家风险厌恶水平 $\gamma = 1$ 时企业的最优规模为 166.50，而当 $\gamma = 2$ 时企业的最优规模减小到 83.25，即风险厌恶水平的增加会减小初始时刻企业的最优投资规模，这一点比较直观，因为企业家越厌恶风险，则越倾向于减小风险暴露，而减小初创企业的规模是一个直接有效的规避非系统风险的手段。同时还发现，风险厌恶水平的增加显著减小了创业投资期权价值，当 $\gamma = 1$ 时，期权价值 $S(K^*)$ 为 13.88，而当 $\gamma = 2$ 时，期权价值 $S(K^*)$ 为 6.44。并且风险厌恶态度对企业家权益价值也有显著影响，在两种风险水平下，权益价值分别为 181.39 和 90.69。

下面分析存在税收时（即 $\tau = 11.29\%$ ）非完全市场的各种影响。由于存在税收节约，企业家通过甄选最优的融资策略来最大化企业初创时刻投资期权的价值。当企业家风险厌恶水平 $\gamma = 1$ 时，企业家的最优融资策略和最大投资期权价值分别为 0.18 和 1.78，而当 $\gamma = 2$ 时，企业家的最优融资策略和最大投资期权价值分别变为 0.09 和 0.39。不难看出，企业家会根据自身的风险厌恶态度来调整最佳融资策略，从而最大化投资期权价值，且企业家越厌恶风险，则选择越保守的融资策略，这一点与直觉相符。而相应债务的公平定价 $D(K^*)$ 在两种风险厌恶水平下分别为 3.58 和 1.79。与无税收情况相比，风险厌恶态度对初创企业的最优规模，企业家权益价值及企业价值都具有相似的影响，如企业家风险厌恶水平 $\gamma = 1$ 时，企业的最优规模为 52.97，而当 $\gamma = 2$ 时，企业的最优规模减小到 26.47，在两种风险水平下，企业家权益价值分别为 52.17 和 26.07，且相应的创业企业的价值为 55.75 和 27.86。进一步还发现，风险厌恶态度对创业企业的财务杠杆水平影响并不明显，如表 1 所示，当 $\gamma = 1$ 时， $L(K^*) = 6.42\%$ ；而当 $\gamma = 2$ 时， $L(K^*) = 6.43\%$ 。

下面分析企业正常运营阶段过程中实业投资的行为。图 1 分别给出了税率 τ 为 0 和 11.29% 以及风险厌恶态度 γ 为 1 和 2 时，企业的实业投资策略。由图 1 (a) 可知，对于纯股本企业，企业规模越小投资动机越强，风险厌恶水平越高实业投资动机越小，且企业家无破产动机。根据式 (24) 可知，在非完全市场下，企业家的最优实业投资决策依赖于有效 Miller 税率。由图 1 (b) 可知，随着企业家风险厌恶水平的增加，他更倾向于采取较小的实业投资来减少风险暴露，因此 γ 越大， $i(K)$ 越小。而当企业资本存量本身较低时，由于破产期权本身可以控制企业家的下行风险，所以此时的实业投资决策受非系统风险的影响很小，即企业家的风险厌恶水平 γ 对实业投资-资本比 $i(K)$ 影响不显著。同时，通过比较图 1 (a) 与图 1 (b) 进一步发现，在非完全市场下，存在税收会显著减小企业家的投资动机，这一点与完全市场不同（在完全市场下税收不影响实业投资决策）。

4 结论

本文假设一个拥有创业企业全部权益的企业家面临着不可分散的非系统风险，在给定的税收政策下，通过甄选融资水平、控制实业投资规模、平滑消费、选择破产/套现以及金融市场的投资组合，来最大化无限期内的消费总效用。运用随机最优控制方法、资本资产定价及消费效用无差别定价理论，得到了企业家权益和投资期权的价值以及相应的投融资、消费策略以及破产/套现决策。

理论分析和数值结果表明：风险厌恶系数的增加显著降低了初创企业的融资水平、资本规模、投资期

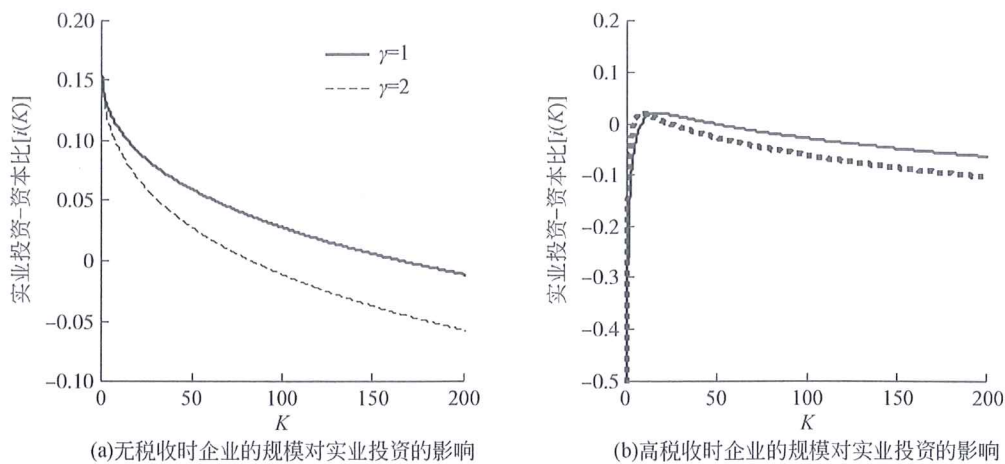


图1 不同税率和风险厌恶态度下企业的实业投资

Fig. 1 The real investment of enterprise under different tax rates and risk aversion attitudes

权价值和企业的价值，同时还显著减小了企业家的实业投资动机。

总体来说，与现有理论方法相比，本文考虑理性企业家厌恶风险的事实，对企业资本资产给出了更为科学的价值评估，基于这种定价机制的最优经营策略，能够更加有效的优化企业的资本结构和资本积累、控制企业的经营性风险，从而为实现企业家的效用最大化提供了更加有效的理论依据及具体操作方案。

参考文献：

- [1] Modigliani F, Miller M. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment [J]. American Economic Review, 1958, 48 (3): 261-297.
- [2] Jensen M C, Meckling W H. Theory of the firm: managerial behavior, agency costs and ownership structure [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3 (4): 305-360.
- [3] Myers S C. Interactions of corporate financing and investment decisions-Implications for capital budgeting [J]. Journal of Finance, 1974, 29 (1): 1-25.
- [4] Mello A S, Parsons J E. Measuring the agency costs of debt [J]. Journal of Finance, 1992, 47 (5): 1887-1904.
- [5] Leland H E. Agency costs risk management and capital structure [J]. Journal of Finance, 1998, 53 (4): 1213-1243.
- [6] Mauer D C, Sarkar S. Real option, agency conflicts and optimal capital structure [J]. Journal of Banking and Finance, 2005, 29 (6): 1405-1428.
- [7] DeMarzo P M, Fishman M J, He Z G, et al. Dynamic agency and the q theory of investment [J]. Journal of Finance, 2012, 67 (6): 2295-2340.
- [8] Bolton P, Chen H, Wang N. A unified theory of Tobin's q, corporate investment, financing and risk management [J]. Journal of Finance, 2011, 66 (5): 1545-1578.
- [9] 简志宏, 李楚霖. 公司债务重组的实物期权方法研究 [J]. 管理科学学报, 2002, 5 (5): 38-43.
Jian Z H, Li C L. Study on real option approach of corporate debt reorganization [J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5 (5): 38-43. (in Chinese)
- [10] 刘向华, 李楚霖. 公司债务与内生破产的实物期权方法分析 [J]. 管理工程学报, 2005, 19 (1): 95-99.
Liu X H, Li C L. Real option analysis on corporate debt and endogenous bankruptcy [J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2005, 19 (1): 95-99. (in Chinese)
- [11] 刘星, 彭程. 基于企业投融资决策协同互动的实物期权分析 [J]. 系统工程, 2007, 25 (4): 59-63.
Liu X, Peng C. Real option analysis on interaction effects and harmonizing decisions between investment and financing [J]. System Engineering, 2007, 25 (4): 59-63. (in Chinese)
- [12] 曾爱民, 魏志华. 融资约束、财务柔性与企业投资—现金流敏感性——理论分析及来自中国上市公司的经验证据 [J]. 财经研究, 2013, (11): 48-58.
Zeng A M, Wei Z H. Financial constraints, financial flexibility and investment-cash flow sensitivity: Theoretical analysis and empirical evidence from listed companies in china [J]. Journal of Finance and Economics, 2013, (11): 48-58. (in Chinese)

- [13] 邓可斌, 曾海舰. 中国企业的融资约束: 特征现象与成因检验 [J]. 经济研究, 2014, (2): 47-61.
Deng K B, Zeng H J. The financial constraints in China [J]. Economic Research Journal, 2014, (2): 47-61. (in Chinese)
- [14] 喻坤, 李治国, 张晓蓉, 等. 企业投资效率之谜: 融资约束假说与货币政策冲击 [J]. 经济研究, 2014, (5): 106-120.
Yu K, Li Z G, Zhang X R, et al. Investment efficiency puzzle: Financial constraint hypothesis and monetary policy shock [J]. Economic Research Journal, 2014, (5): 106-120. (in Chinese)
- [15] Henderson V. Valuing the option to invest in an incomplete market [J]. Mathematics and Financial Economics, 2007, 1 (2): 103-128.
- [16] Miao J J, Wang N. Investment, consumption and hedging under incomplete markets [J]. Journal of Financial Economics, 2007, 86 (3): 608-642.
- [17] Quadrini V. Entrepreneurship in macroeconomics [J]. Annals of Finance, 2009, 5 (3-4): 295-311.
- [18] Chen H, Miao J J, Wang N. Entrepreneurial finance and non-diversifiable risk [J]. Review of Financial Studies, 2010, 23 (12): 4348-4388.
- [19] Sorensen M, Wang Yang, Yang J Q. Valuing private equity [J]. Review of Financial Studies, 2014, 27 (7): 1977-2021.
- [20] Liu B, Liu Y, Yang J Q. Optimal ownership structure in private equity [J]. European Financial Management, 2017, DOI: 10.1111/eufm.12130.
- [21] Wang C, Wang N, Yang J Q. A unified model of entrepreneurship dynamics [J]. Journal of Financial Economics, 2012, 106 (1): 1-23.
- [22] Hamilton B H. Does entrepreneurship pay? An empirical analysis of the returns to self-employment [J]. Journal of Political Economy, 2000, 108 (3): 604-631.
- [23] Kogan L. An equilibrium model of irreversible investment [J]. Journal of Financial Economics, 2001, 62 (2): 201-245.
- [24] Kogan L. Asset prices and real investment [J]. Journal of Financial Economics, 2004, 73 (3): 411-431.
- [25] Pindyck R S, Wang N. The economic and policy consequences of catastrophes [J]. American Economic Journal: Economic Policy, 2013, 5 (4): 306-339.
- [26] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices [J]. Econometrica, 1985, 53 (2): 363-384.
- [27] Jones L E, Manuelli R E. Neoclassical models of endogenous growth: The effects of fiscal policy, innovation and fluctuations [J]. Handbook of Economic Growth, 2005, 1: 13-65.
- [28] Eberly J C, Wang N. Capital reallocation and growth [J]. American Economic Review Papers and Proceedings, 2009, 99 (2): 560-566.
- [29] Hayashi F. Tobin's marginal q and average q: A neoclassical interpretation [J]. Econometrica, 1982, 50 (1): 215-224.
- [30] Lucas R E, Prescott E C. Investment under uncertainty [J]. Econometrica, 1971, 39 (5): 659-681.
- [31] Abel A B, Blanchard O J. An intertemporal model of saving and investment [J]. Econometrica, 1983, 51 (3): 675-692.
- [32] Childs P D, Mauer D C, Ott S H. Interactions of corporate financing and investment decisions: The effects of agency conflicts [J]. Journal of Financial Economics, 2005, 76 (3): 667-690.
- [33] Graham J R. How big are the tax benefits of debt [J]. Journal of Finance, 2000, 55 (5): 1901-1941.
- [34] Mehra R, Prescott E C. The equity premium: A puzzle [J]. Journal of Monetary Economics, 1985, 15 (2): 145-161.
- [35] Eberly J C, Rebelo S, Vincent N. Investment and value: A neoclassical benchmark [OL]. http://www.cirpee.org/fileadmin/documents/Cahiers_2009/CIRPEE09-08.pdf [2009-03-01].
- [36] Whited T D. Liquidity constraints and corporate investment: Evidence from panel data [J]. Journal of Finance, 1992, 47 (4): 1425-1460.
- [37] Hall R E. Measuring factor adjustment costs [J]. Quarterly Journal of Economics, 2004, 119 (3): 899-927.
- [38] Riddick L A, Whited T M. The corporate propensity to save [J]. Journal of Finance, 2009, 64 (4): 1729-1766.
- [39] Hackbarth D, Hennessy C A, Leland H E. Can the tradeoff theory explain debt structure? [J]. Review of Financial Studies, 2007, 20 (5): 1389-1428.

Investment and Financing of the Enterprise based on CARA Utility under Incomplete Markets

Yang Jinqiang, Peng Juan

School of Finance, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China

Abstract: This paper considers a corporate finance problem for a risk-averse entrepreneur facing business risk to maximize the expectation of total consumption utility through optimal financing, consumption smoothing, real/financial investment under a given tax environment. We derive semi-closed-form solution for the value of the equity and investment option as well as the optimal investment and financing strategy. The theoretical and numerical results show that the risk attitude of the entrepreneur has significant effects on financing strategy, investment option value, real investment strategy and so on under incomplete markets.

Key words: Risk Aversion; Downside Risk; Bankruptcy Protection; Real Investment