

季节调整的原理分析^①

张晓峒¹, 聂思玥²

(1. 南开大学 经济学院, 天津 300071; 2. 山西大学 管理与决策研究所, 太原 030006)

摘要: 本文对两个主流季节调整方法进行梳理, 结合范例进行了分析。文章理论分析部分首先介绍了序列预调整方法——regARIMA 和 TRAMO 的基本原理; 其次从移动平均滤子的频域分析角度讨论了 X11 方法的季节调整原理; 再次从信号提取角度分析了 SEATS 方法的季节调整原理; 最后针对当前方法中存在的不足, 介绍了季节调整理论领域的一些新发展。

关键词: 季节调整; X11; 移动平均滤子; TRAMO-SEATS

中图分类号: F224 **文献标识码:** A **文章编号:** (2017) 01-0087-13

季节调整是为了更准确地测定和分析社会经济运行基本态势, 需要将经济序列中的季节性因素剔除。在 20 世纪 40 年代, 国外学者就已经开始研究季节调整技术并将该技术逐步服务于官方经济统计数据。在国内, 20 世纪鲜有分析研究季节调整原理的文献。本文从原理分析角度介绍了当前两种主流的季节调整方法。

0 引言

人们对经济序列中存在季节性变化的认识与研究比较早。1854 年, 英格兰学者 John T. Gilbert 就对英国金融市场的季节性变化进行了研究。Yule^[1]指出, 在 1905 年就有学者提出经济序列可看成由长期趋势成分、循环成分、季节成分和不规则成分四个成分构成, 这个提法在 1914 年后才被固定下来使用(趋势成分和循环成分在真正做季节调整处理时并不区分, 合并为趋势循环成分, 因而后文也将采用这种约定的处理方法)。直到 20 世纪二三十年代, 现代季节调整中的一些观点开始逐步形成。例如, Britten 和 Sydenstricker^[2]认为季节成分可以包含随机性并随时间而变化; Macaulay^[3]认为趋势和循环成分很难以显性的回归表达式来表示, 因而他采用了移动平均的方法来估计趋势成分; Falkner^[4]、Joy 和 Thomas^[5]则提出估计季节成分需要考虑异常值等。当时还没有成型季节调整方法, 虽然这些问题较早就被发现了, 但是直到今天解决这些问题的方法仍然在不断完善中。

季节调整的兴起是在计算机技术出现之后, 1954 年, Shiskin 首先在美国普查局研制了季节调整程序“方法 I”^[6]。1965 年又推出改进版 X-11, 并被经济合作与发展组织采用。随后季节调整最主流的一种方法——X11 调整方法^②定名, 该方法依靠一系列移动平均滤子的组合使用来实现季节调整, 并一直在不断更新和发展中。Dagum^[7]在 X-11 的基础上引入了 ARIMA 建模, 使 X-11 发展为 X-11-ARIMA, 该方法被美国普查局和加拿大统计局倡导使用。X-11-ARIMA 允许将待调整序列向前预测一年和向后预测一年, 在使用中心对称移动平均滤子时, 原始数据两端的值就也能参与移动平均变换, Dagum^[8]对 X-11-ARIMA 调整软件进行了较全面的介绍。在 X-12-ARIMA 的版本中则加入了预调整 regARIMA 模块, 该模块对交易日效应、假日效应、季节性异常值和其他各类离群值进行识别, Findley 和 Monsell^[9]对 X-12-ARIMA 的改进进行了说明, 在最新的版本 X-13A-S 中加入了 SEATS 模块。尽管如此, 目前该系列软件的核心模块仍然

① 基金项目: 国家社会科学基金项目(10BTJ010)。

作者简介: 张晓峒(1949—), 男, 河北唐山人, 经济学博士, 南开大学数量经济研究所教授, 博士生导师, 研究方向: 计量理论与应用, Email: zhangnk710@126.com; 聂思玥(1982—), 男, 江西吉安人, 经济学博士, 山西大学管理与决策研究所讲师, 研究方向: 金融计量、金融工程和风险管理, Email: niesy119@163.com。

② X-11 指的是季节调整方法(该方法的软件命名也据此而来), 而 X11 是该方法所采用的核心原理。

是 X11 调整方法。

X-11 方法在早期就受到了一些学者的批评,被认为调整流程过于烦琐复杂,与当时的数学方法发展水平比较显得有些“原始”,且逻辑性也不清晰。在 20 世纪 40 年代,信号提取的方法被提出,Wiener 和 Kolmogorov 分别研究了平稳序列在加法模型下进行成分提取。

时间序列建模方法出现后,Whittle^[10]首先使用了高阶滞后的时间序列建模方法来表示季节成分。20 世纪 70 年代,随着 Box 和 Jenkins 的《时间序列分析——预测与控制》一书出版,基于建模的季节调整方法得到了迅速发展,并产生了两个主要分支。一个分支是结构时间序列方法,直接对序列的各个组成成分分别建模,代表学者是 Harvey^[11],并开发了 STAMP 软件,但未成为主流。另一个分支是基于 ARIMA 建模方法和信号提取原理,并最终发展为 SEATS 方法,该方法也是目前主流的季节调整方法之一。

Box 和 Hillmer^[12]用经典的航线模型,假定原序列由 3 个成分加总而成,应用信号提取原理进行成分分解,为了得到平滑的趋势和季节成分,约束不规则成分方差最大,趋势和季节成分方差最小。Burman^[13]从理论层面提出了更为一般的季节时间序列信号提取分解方法。Hillmer 和 Tiao^[14]从传递函数分析的角度讨论了一般季节 ARIMA 模型的分解方法,并用常见的季节 ARIMA 模型进行了分析。Bell 和 Hillmer^[15]对季节调整存在的问题进行了梳理并用实证分析进行说明。

上述文献构成了 SEATS 方法的理论基础。Gómez 和 Maravall^[16]开发了 TROMA-SEATS 软件,并被西班牙人民银行推广使用。和 regARIMA 一样,TROMA-SEATS 软件中的 TROMA 模块用来进行序列预调整处理,运用 Gómez 和 Maravall^[17]的方法对序列进行识别建模。Caporello 和 Maravall^[18]发布了 TROMA-SEATS 的视窗版本 TSW。

国内关于季节调整的文献,主要以季节调整在宏观经济中的应用研究为主。夏春^[19]研究了用 TROMA-SEATS 和 X-12-ARIMA 方法对几种中国季度 GDP、月度工业增加值和月度社会消费品零售额等经济序列进行季节调整的比较分析。张鸣芳^[20],范维和张磊^[21]分别以综述形式介绍了国际上季节调整方法发展的动态,分析我国对季节调整认识与实践存在的问题。王群勇^[22]分别用结构时间序列方法对中国季度 GDP 等序列进行了季节调整的研究。

南开大学以张晓峒为首的研究团队在为中国人民银行(People's Bank of China, PBC)开发了季节调整软件 PBC 版 X-12-ARIMA(2006 年)之后,又为国家统计局研制了季节调整软件 NBS-SA(2006 年)。在 NBS-SA 软件中结合中国国情全面处理了中国移动假日效应,包括春节、中秋节、端午节、黄金周、调休等效应,并在效应变量的定义上创新性地给出了 4 种模式,突破了美国普查局只给出等权定义的局限,从而使季节调整结果的质量更高。

1 季节调整方法原理分析

上述两个主流的季节调整方法都是通过分别运行两个模块完成季节调整。第一个模块是序列预调整模块,主要功能包括通过建模消除工作日效应、假日效应、离群值、缺失值并为后续季节调整提供序列的前向和后向预测值等;第二个模块是季节调整模块,将(预调整)序列分解成为 3 个成分,即趋势循环成分、季节成分和不规则成分。

下文将对当前两个主流调整方法的核心工作原理进行分析,但不是软件工作流程的介绍,因为软件作为方法的实现需要考虑极多更为细致复杂的问题。本节接下来分两部分进行介绍,首先介绍对序列的预调整;其次对季节调整模块的原理进行分析。

1.1 序列的预调整

regARIMA 和 TRAMO 都是对序列进行预调整,Maravall 和 Pérez^[23]指出两者工作原理类似,有些模块甚至是相同的,如 X-13A-S 中的“automdl”模块就是基于 TROMA 的自动模型识别模块开发的。一个待调整的原序列往往包含有离群值,而交易日和工作日效应在每个月度(或季度)内也会对数据产生影响,同时移动假日(如中国的春节)效应及日历效应(如 2 月天数的不同)会对数据产生影响,预调整就是将这些因素剔除,计算出预调整值。其基本原理是设定不同的虚拟变量分别表示离群值和各类可能存在的

效应，结合时间序列建模方法建立 regARIMA 模型。

用 $d_i(t)$ 表示时间 t 的第 i 类离群值虚拟变量， $cal_i(t)$ 表示时间 t 的第 i 类日历效应（可将交易日、工作日归并到此类）变量， $hol_i(t)$ 表示时间 t 的第 i 类假日效应变量， $reg_i(t)$ 表示其他用户自定义的干扰变量，对应的变量个数分别用 n_{out} 、 n_{cal} 、 n_{hol} 和 n_{reg} 表示。则时间序列 Y_t 的预调整通过以下模型实现：

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^{n_{out}} \alpha_i \phi_i(B) d_i(t) + \sum_{i=1}^{n_{cal}} \beta_i cal_i(t) + \sum_{i=1}^{n_{hol}} \gamma_i hol_i(t) + \sum_{i=1}^{n_{reg}} \eta_i reg_i(t) + x_t \quad (1)$$

$$\Phi(B) \Phi_s(B) \Delta^d \Delta_s^D x_t = \Theta(B) \Theta_s(B) a_t, a_t \sim iid(0, \sigma^2) \quad (2)$$

式中，离群值被假定为有滞后影响，用 $\Phi_i(B)$ 表示； B 表示滞后算子； Δ^d 表示 d 次普通差分算子； Δ_s^D 表示 D 次季节差分算子；式中滞后算子多项式中下标 s 为表明是季节滞后多项式。式 (1) 中对原序列消除了离群值及其他各种效应，并去除均值后得到序列 x_t ，式 (2) 对序列 x_t 建立了 SARIMA 模型。

现以中国春节为例（春节是移动假日，即每年不是在固定的公历日期过春节）说明如何设定式 (1) 中的效应变量。假定春节影响天数为 40 天，如果是季度数据则不会产生跨季度假日效应，应该影响都在一个数据测量期内（农历春节都在一季内）；如果是月度数据，则该影响跨了月份，对假日效应应该处理。对于其影响假定分为节前节后两个效应变量。例如，某年的情况是节前影响 20 天（其中 1 月 15 天，2 月 5 天）和节后影响 20 天（全部在 2 月），这样需要对这两段影响分别设定虚拟变量 $hol_p(t)$ 、 $hol_a(t)$ ，考虑每段内等权影响，效应变量在该年的赋值如下：

$$hol_p(t=1, 2, \dots, 12) = \left\{ \frac{15}{20}, \frac{5}{20}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

$$hol_a(t=1, 2, \dots, 12) = \left\{ 0, \frac{20}{20}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$$

各类效应变量的设定需要根据实际情况，通过一定转换总能构造出合适的效应变量来反映各类不同的效应或异常值，可以参阅夏春^[19]、栾惠德和张晓峒^[24]和陈雄强和张晓峒^[25]的效应变量设定。

预调整目的是得到调整后的序列 x_t ，因该模块已经建立了 ARIMA 模型，从而能做前向和后向预测，以便下一步在季节调整模块中使用。

1.2 季节调整模块原理分析

时间序列由 x_t 趋势循环成分 (T_t)、季节成分 (S_t) 及不规则成分 (I_t) 构成。经典的时间序列季节调整成分模型有加法模型和乘法模型，即

$$x_t = T_t + S_t + I_t \quad (3)$$

$$x_t = T_t \times S_t \times I_t \quad (4)$$

对于乘法模型，在两边分别取对数后，实际上又变成对数加法模型，即

$$\ln x_t = \ln T_t + \ln S_t + \ln I_t \quad (5)$$

文献综述中已经说明，X11 方法和 SEATS 方法的原理不相同，下文对这两个方法的工作原理分别进行分析。

1.2.1 移动平均与 X11 方法

X11 方法核心原理是组合使用移动平均滤子进行变换。对一个时间序列使用移动平均滤子做变换，在时域里是对序列进行线性加权求和，但序列本身发生了什么规律性变化可从频域分析看得更为清楚。由傅里叶分析可知，任何二阶平稳的时间序列均可由多个频率分量来表示，对于存在线性趋势的序列可去除均值成分后再做频域分析，因此如果没做特别说明，下文中 x_t 均为二阶平稳过程。频域分析一般将频率、振幅和相位 3 个方面结合起来研究序列的变化规律。

1. 移动平均变换原理

对于移动平均变换 $z_t = \sum_{j=-m}^n \lambda_j x_{t-j}$ （当 $m=n$ 且 $\lambda_j = \lambda_{-j}$ 时，称为对称中心化移动平均），Findley 和 Martin^[26] 定义频率响应函数如下：

$$C(\omega) = \sum_j \lambda_j e^{-ij\omega}, \omega \in [0, \pi] \quad (6)$$

式中, i 表示虚数符号。则其振幅函数 $A(\omega)$ 和相位函数 $P(\omega)$ 分别是

$$A(\omega) = \left| \sum_j \lambda_j e^{-ij\omega} \right| \tag{7}$$

$$P(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[C(\omega)]}{\text{Re}[C(\omega)]}\right) \tag{8}$$

式 (8) 中, $\text{Im}[C(\omega)]$ 和 $\text{Re}[C(\omega)]$ 分别表示 $C(\omega)$ 的虚部和实部。以 3 项对称中心化移动平均 $\{\lambda_j\} = \left\{ \lambda_{-1} = \frac{1}{3}, \lambda_0 = \frac{1}{3}, \lambda_1 = \frac{1}{3} \right\}$ 为例, $z_t = \sum_j \lambda_j x_{t-j}, j = -1, 0, 1$, 则

$$C_3(\omega) = \frac{1}{3} [\cos\omega + \cos 0 + \cos(-\omega)] + i \frac{1}{3} [\sin\omega + \sin 0 + \sin(-\omega)]$$

$$A_3(\omega) = \left| \sum_{j=-1}^1 \lambda_j e^{-ij\omega} \right| = \frac{1}{3} \{ [\cos\omega + \cos 0 + \cos(-\omega)]^2 + [\sin\omega + \sin 0 + \sin(-\omega)]^2 \}^{\frac{1}{2}} = \frac{(1 + 2\cos\omega)}{3}$$

$$P_3(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}[C(\omega)]}{\text{Re}[C(\omega)]}\right) = \arctan\left[\frac{\sin\omega + \sin 0 + \sin(-\omega)}{\cos\omega + \cos 0 + \cos(-\omega)}\right] = 0$$

其中振幅函数 $A(\omega) = \frac{(1+2\cos\omega)}{3}$, 当 $A(\omega) = 0$ 时, $\omega = 2\pi/3$, 即对序列 x_t 中剔除了频率 $\omega = 2\pi/3$ (周期 = $2\pi/\omega = 3$) 的成分; 而相位函数 $P(\omega) = 0$ 则表示本次变换在任何频率上都没有发生相位变化 (时间滞后)。

因此, 振幅函数反映的是移动平均变换中所消除或保留的频率成分, 而相位函数则反映序列 (在相位上的) 时间滞后问题, 可判断变换后序列是否与原序列的趋势转折保持同步。

此外, 由于 $A(\omega) = \frac{(1+2\cos\omega)}{3} \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, 即 $\{Z_t\}$ 在各个频率的振幅都有不同幅度的减小, 说明变换后序列的方差减小了。二阶平稳条件下, 由

$$\text{Var}(z_t) = \sum_{j=-1}^1 \lambda_j^2 \text{Var}(x_t) = \sum_{j=-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{Var}(x_t) = \frac{1}{3} \text{Var}(x_t)$$

可知, z_t 的方差减小为原序列的 $\frac{1}{3}$, 即上述移动平均变换起到了平滑序列的效果。

2. 构造移动平均滤子

如前文所述, 可以利用构造移动平均滤子的方式来消除或保留特定频率成分, 而这个特点正是季节调整过程中所需要的。季节调整需要将趋势循环成分、季节成分、不规则成分分离出来, 则可以通过构造不同的移动平均滤子, 组合使用来达到季节调整的目的。

构造移动平均滤子需要根据变换的目的进行设计, 这个问题往往可处理成如下的静态优化问题。

设 $m+n+1$ 阶移动平均变换为 $\{\lambda_j, j = -m, -m+1, \dots, n\}$, 原始序列 x_t 由线性趋势 $\alpha t + \beta$ (均值成分) 和平稳过程 x'_t 组成, 则 x_t 可表示为 $x_t = \alpha t + \beta + x'_t, E(x'_t) = 0$, 对 x'_t 进行频域分析即可。 $m+n+1$ 阶移动平均变换如下,

$$\begin{aligned} z_t &= \sum_{j=-m}^n \lambda_j x_{t-j} \\ &= \sum_{j=-m}^n \lambda_j [\alpha(t-j) + \beta + x'_{t-j}] \end{aligned} \tag{9}$$

考虑如下变化要求:

1) 变换后的序列 z_t 均值不发生变化, 即 $E(z_t) = E(x_t)$ 。对于二阶平稳序列来说, 由于存在关系 $E(z_t) = E\left(\sum_{j=-m}^n \lambda_j x_{t-j}\right) = \sum_{j=-m}^n \lambda_j \times E(x_t)$, 因此当 $\sum_{j=-m}^n \lambda_j = 1$ 成立时, 必然有 $E(z_t) = E(x_t)$ 成立, 即保持了变换前后的均值不变。

2) 变换后序列 z_t 保留线性趋势。式 (9) 表明保留线性要求 $\sum_{j=-m}^n \lambda_j = 1, \sum_{j=-m}^n j\lambda_j = 0$ 。中国人民银

行^[29]还能推广到保留 d 次多项式的更一般情形, 则须满足 $\sum_{j=-m}^n \lambda_j = 1, \sum_{j=-m}^n j^q \lambda_j = 0, q = 1, \dots, d$ 。

3) 变换后序列 z_t 无相位变化。从 $\sum_{j=-m}^n \lambda_j x'_{t-j}$ 的频率响应函数可以看到, 当 $\text{Im}[C(\omega)] = \sum_{j=-m}^n \lambda_j \sin j\omega = 0$ 时, 变换不引起相位变化。显然 $m=n$ 且 $\lambda_j = \lambda_{-j}$ 满足这个条件, 即要求是对称中心化移动平均。

4) 变换后序列 z_t 达到最佳平滑效果。这要求 z_t 的方差最小, 即 $\min \sum_{j=-m}^n \lambda_j^2$ 。

现考虑用一个 5 阶中心化移动平均变换剔除周期为 4 的季节成分, 保留线性趋势, 无时间滞后并使不规则成分最小化 (方差最小, 达到最佳平滑效果)。对于上述问题, 取 $m=n=2$, 首先考虑均值部分, 由式 (9) 可得

$$\bar{z}_t = (\alpha t + \beta) \sum_{j=-2}^2 \lambda_j + \sum_{j=-2}^2 j \lambda_j \quad (10)$$

而对于变换 $\sum_{i=-2}^2 \lambda_i x'_t$, 则有

$$\begin{aligned} C_5(\omega) &= \sum_j \lambda_j e^{-ij\omega}, j = -2, -1, 0, 1, 2 \\ &= [\lambda_{-2} \cos(-2\omega) + \lambda_{-1} \cos(-\omega) + \lambda_0 + \lambda_1 \cos\omega + \lambda_2 \cos 2\omega] \\ &\quad + i[\lambda_2 \sin(-2\omega) + \lambda_1 \sin(-\omega) + \lambda_{-1} \sin\omega + \lambda_{-2} \sin 2\omega] \\ &= [(\lambda_{-2} + \lambda_2) \cos 2\omega + (\lambda_{-1} + \lambda_1) \cos\omega + \lambda_0] + i[(\lambda_{-2} - \lambda_2) \sin 2\omega + (\lambda_{-1} - \lambda_1) \sin\omega] \end{aligned} \quad (11)$$

且变换后的方差 $\text{Var}(z_t) = \text{Var}(x_t) \sum_{j=-2}^2 \lambda_j^2$, 再结合式 (10) 和式 (11), 则该移动平均滤子可通过求解如下静态优化问题得到。

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=-2}^2 \lambda_j^2 \\ &\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=-2}^2 \lambda_j = 1 \\ 2\lambda_{-2} + \lambda_{-1} - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_{-2} - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_{-1} - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_0 + (\lambda_{-2} + \lambda_2) \cos 2\omega + (\lambda_{-1} + \lambda_1) \cos\omega \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{4}} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上述问题的最优解是 $\{\lambda_j, j = -2, -1, 0, 1, 2\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8} \right\}$ 。并非任何时候都能得到唯一满足要求的最优解, 依据设定条件可能出现没有满足要求的变换, 或变换并不唯一的情况, 此时可根据需要对设定条件进行修正。

3. X11 方法

X11 方法只能调整季度和月度数据, 其基本原理正是以其内置构造的各种移动平均滤子对季度或月度数据进行处理, 并最终估计 (分离) 出数据的 3 个成分。下面以季度数据为例, 首先介绍 X11 方法估计各个成分的计算原理, 其次分别介绍计算中使用的移动平均滤子。

1) X11 方法的基本估计原理。待调整序列 Y_t 分解为趋势循环成分 T_t 、季节成分 S_t 及不规则成分 I_t , 按加法模型可表示为 $x_t = T_t + S_t + I_t$ 。

第 1 步, 对待调整的序列用 2×4 移动平均变换估计趋势循环成分, 记作 \hat{T}_t ,

$$\hat{T}_t = \frac{\frac{x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1}}{4} + \frac{x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2}}{4}}{2} \quad (12)$$

第2步, 计算季节不规则成分, 记作 \hat{R}_t ,

$$\hat{R}_t = (\hat{S} + \hat{I})_t = x_t - \hat{T}_t \tag{13}$$

第3步, 对第2步中估计得到的数据使用 3×3 季节移动平均变换来估计季节成分, 即只针对相同季度的数据使用移动平均, 即

$$\hat{S}_t = \frac{\frac{\hat{R}_{t-8} + \hat{R}_{t-4} + \hat{R}_t}{3} + \frac{\hat{R}_{t-4} + \hat{R}_t + \hat{R}_{t+4}}{3} + \frac{\hat{R}_t + \hat{R}_{t+4} + \hat{R}_{t+8}}{3}}{3} \tag{14}$$

因此, 对于季度数据, 3×3 季节移动平均变换为一般移动平均中共有 $8+8+1=17$ 个权数。

第4步, 计算季节调整序列, 即

$$\hat{x}_{SA} = x_t - \hat{S}_t \tag{15}$$

在软件计算实际流程中, X11 采用功能类似的滤子重复上述过程, 因而实际流程要复杂得多, 可参考中国人民银行^[27]。例如, 在第二次提取趋势成分的时候采用的就是 Henderson 滤子, 以下将简要介绍。

2) X11 方法的滤子介绍。包括 2×4 移动平均滤子和 3×3 季节移动平均滤子以及 Henderson 滤子 3 项。 2×4 移动平均滤子。上述估计原理中式 (12) 使用的 2×4 移动平均滤子, 可以进一步写成以下形式:

$$\hat{T}_t = \frac{x_{t-2} + 2 \times x_{t-1} + 2 \times x_t + 2 \times x_{t+1} + x_{t+2}}{8} = \sum_{j=-2}^2 \lambda_j x_{t-j}$$

式中, $\{\lambda_j, j = -2, -1, 0, 1, 2\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8} \right\}$ 的性质在前文已经分析, 消除周期为 4,

$(\omega = \frac{2\pi}{4})$ 相对应频率成分的同时达到了最佳平滑效果, 因此适合季度数据 (周期为 4) 的季节调整使用。

图 1 为该滤子的振幅函数图。

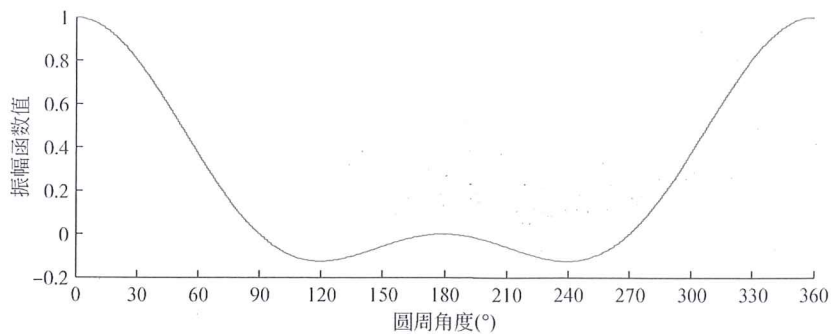


图 1 2×4 移动平均滤子振幅函数图

Fig. 1 Amplitude function of 2×4 moving average filter

3×3 季节移动平均滤子。待调整数据为季度数据, 3×3 季节移动平均变换则针对不同年份的同一季度进行变换, 可将式 (14) 的变换过程写成如下形式:

$$\hat{S}_t = \frac{\hat{R}_{t-8} + 2 \times \hat{R}_{t-4} + 3 \times \hat{R}_t + 2 \times \hat{R}_{t+4} + \hat{R}_{t+8}}{9}$$

因而其实际的移动平均滤子系数如下:

$$\{\lambda_j, j = -8, \dots, 8\} = \left\{ \frac{1}{9}, 0, 0, 0, \frac{2}{9}, 0, 0, 0, \frac{3}{9}, 0, 0, 0, \frac{2}{9}, 0, 0, 0, \frac{1}{9} \right\}$$

该变换满足以下性质: 变换系数满足 $\sum_{j=-m}^n \lambda_j = 1, \sum_{j=-m}^n j \lambda_j = 0$, 依据前文的讨论, 变换后序列的线性均值部分能与变换前保持一致。如果待调整序列的均值部分含有高次项或其他形式的成分, 则变换后的均值成分会有损失, 需要进一步做标准化^①。该变换保留了 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 及其倍频的成分。设待调整序列去均值后形

① 这一步通常是用每一期季节因子估计值减去该期季节因子的 2×4 对称中心化移动平均滤子的输出值得到标准化后的季节因子。

式为 $x^R = \hat{R}_t - \bar{\hat{R}}_t$, 则对于变换 $\sum_{j=-8}^8 \lambda_j x_{t-j}^R$:

$$\begin{aligned} C_{17}(\omega) &= \sum_j \lambda_j e^{-ij\omega}, j = -8, -1, \dots, 8 \\ &= \frac{\cos 8\omega + 2\cos 4\omega + 3 + 2\cos(-8\omega) + \cos(-4\omega)}{9} + i \frac{\sin 8\omega + 2\sin 4\omega + 2\sin(-8\omega) + \sin(-4\omega)}{9} \\ &= \frac{2\cos 8\omega + 4\cos 4\omega + 3}{9} \end{aligned}$$

该变换的振幅函数 $(3+2\cos 8\omega+4\cos 4\omega)/9$ 在 $\omega = \frac{2\pi}{4}$ 时取得峰值, 其他时候则从峰值迅速骤减到 0 (图 2)。

因此能很好地将待调整序列中周期为 4 的成分保留下来, 从而可以提取季度的季节性成分。

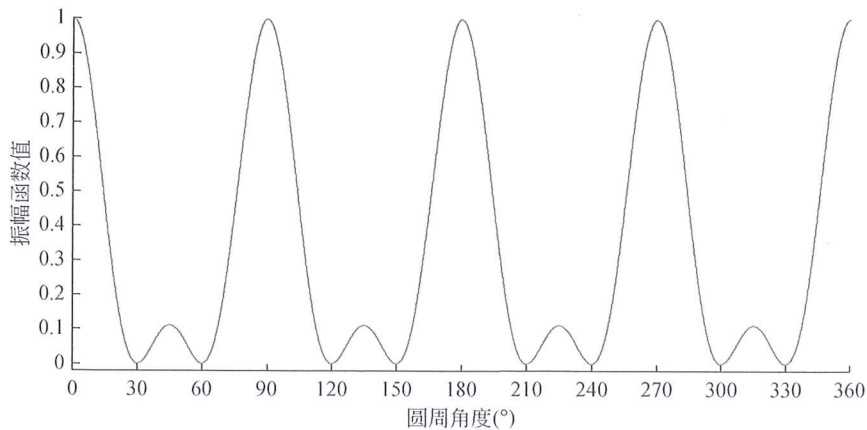


图 2 3×3 季节移动平均滤子振幅函数图

Fig. 2 Amplitude function of 3×3 moving average filter

X11 提取趋势成分的核心滤子——Henderson 滤子。X11 提取趋势成分的核心滤子是 Henderson 滤子, 这个滤子是对称的。Alexandrov 和 Bianconcini^[28]指出 Henderson 是使用最为广泛的趋势提取滤子, 其滤子的设计初衷是为了满足平滑要求, 同时保留时间趋势的三次方项, Henderson 证明求解下面静态最优化问题可得到满足这些要求的滤子。

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=-m}^m (\Delta^3 \lambda_j)^2 \\ &\text{s. t. } \sum_{j=-m}^m \lambda_j = 1; \quad \sum_{j=-m}^m j \lambda_j = 0; \quad \sum_{j=-m}^m j^2 \lambda_j = 0 \end{aligned}$$

X11 使用 13 项 Henderson 移动平均来提取月度数据的长期趋势。在有限样本的边界数据区域, X11 的对称滤子被 Musgrave 非对称滤子替代。Wallis^[29]表示 X11 并非一个一致的过程, 对称的 Henderson 滤子假设序列存在一个局部三次方的趋势, 而加约束的 Musgrave 非对称滤子则假设序列为一个局部线性趋势。

1. 2. 2 SEATS 原理分析

SEATS 是基于 ARIMA 建模思想的一种信号提取方法。在 SEATS 方法中, 同样不区分趋势成分和循环成分, 该方法假定季节时间序列 x_t 由 3 个独立的随机成分加总而成, 即加法模型 (3) 或模型 (5)。利用 ARIMA 建模方法对其建立如下季节模型。令 $z_t = \nabla^d \nabla_s^p x_t$, 则

$$\phi(B)(z_t - \bar{z}) = \theta(B)a_t, a_t \sim (0, \sigma_a^2) \quad (16)$$

式中, $\phi(B) = \phi_r(B)\phi_s(B^s)$, $\theta(B) = \theta_r(B)\theta_s(B^s)$, 用下标 r 和 s 区别普通滞后算子多项式和季节滞后算子多项式, $\phi(B)$ 、 $\theta(B)$ 的根均在单位圆之外; \bar{z} 是 z_t 的均值。

为了最终从原始序列中分解出 3 个独立的成分, 约束趋势循环和季节两个成分方差最小, 即将这两个成分中的加性白噪声转移到不规则成分中, 从而不规则成分的方差被最大化, 这种分解的方式被称为典型分解 (canonical decomposition)。

1. SEATS 原理

式 (16) 可以写成 $\psi_T(B)\psi_S(B)x_t = \theta(B) a_t$ 的形式, $\psi_T(B)$ 表示趋势循环成分算子, $\psi_S(B)$ 表示季节成分算子。令 $\nabla_s^D = (1-B^s)^D = (1-B)^D (1+B+\dots+B^{s-1})^D$, $\nabla^d = (1-B)^d$, 则式 (16) 可表示成

$$(1-B)^d (1-B)^D (1+B+\dots+B^{s-1})^D \phi_r(B)\phi_s(B^s)x_t = \theta_r(B)\theta_s(B^s)a_t + \phi(1)\bar{z} \tag{17}$$

为了将式 (17) 中各个成分区分开, 需从频域角度认识各个成分。趋势成分、循环成分、季节成分和不规则成分, 从频域角度解释如下。

趋势成分代表序列的长期趋势, 在频域里体现为在 0 频率上有峰值, 循环成分代表在长期趋势上的周期性波动, 但这种波动的频率在 $(0, 2\pi/s)$ 之间, 这两个成分往往不区分; $2\pi/s$ 是季节频率, 季节成分在该频率及其倍频 $(2k\pi/s, k=1, 2, \dots, [s/2], [s/2]$ 表示向下取整) 上有峰值; 而不规则成分则往往被认为是低振幅的低阶 MA 过程或白噪声, 在各个频率上均匀分布。

将上式 AR 部分的各个因子重新组合归并到趋势循环成分算子 $\psi_T(B)$ 和季节成分算子 $\psi_S(B)$ 中。 $(1-B)^d (1-B)^D \phi_r(B)$ 代表趋势循环成分包含在 $\psi_T(B)$ 中, 该 AR 多项式中根在单位圆上的部分 $(1-B)^d (1-B)^D$ 代表趋势成分; $(1+B+\dots+B^{s-1})^D$ 代表季节成分包含在 $\psi_S(B)$ 中。 $1+B+\dots+B^{s-1} = 0$ 的 $s-1$ 根 (若 s 为偶数, 则在单位圆上有 $s/2-1$ 对共轭根和另一个根 -1 ; 若 s 为奇数, 则在单位圆上有 $s-1/2$ 对共轭根) 分别代表序列在频率 $2k\pi/s, k=1, 2, \dots, [s/2]$ 上存在峰值。但是对 $\phi_s(B^s) = 0$ 的根的讨论较为复杂, 简要说明。设 τ 是 $\phi_s(B^s) = 0$ 的一个实根, 则 $1-1/\tau B^s$ 是 $\phi_s(B^s)$ 的一个因子, 如果 $\tau > 0$ 可对该因子作如下分解, $1-\frac{1}{\tau}B^s = \left(1-\frac{1}{\tau_0}B\right)\left(1+\frac{1}{\tau_0}B+\frac{1}{\tau_0^2}B^2+\dots+\frac{1}{\tau_0^{s-1}}B^{s-1}\right)$, τ_0 是 $1-\frac{1}{\tau}B^s = 0$ 的一个正的实根, 则式中 $1-\frac{1}{\tau_0}B$ 部分应该包含在 $\psi_T(B)$ 中, 而第二部分则属于 $\psi_S(B)$; 如果 $\tau < 0$ 或 τ 为复数, 则会出现无法区分的混杂情况, Burman^[13] 对此略有论述。但按照 Hillmer 和 Tiao^[14] 的说法, $\psi_T(B)$ 中只包含 $(1-B)^d (1-B)^D$, $\psi_S(B)$ 中只包含 $u(B) = (1+B+\dots+B^{s-1})^D$, 为了使后文分析简洁, 本文将采用这种方式。

如上文, 只需从 AR 多项式根的情况讨论各个成分, $\theta(B) = \theta_r(B)\theta_s(B^s)$ 不影响各个成分在序列谱上的分解, 在下面运算过程中不区分 $\theta(B)$ 中的季节与非季节算子。

x_t 各个成分的 ARIMA 模型写成以下形式:

$$\begin{cases} (1-B)^p T_t = f_T(B) b_t, p = d + D \\ u(B) S_t = f_S(B) c_t \\ I_t = f_I(B) d_t \end{cases} \tag{18}$$

如果式 (8) 中, 各个成分模型结构及参数已知, 则可以用 Wiener-Kolmogorov (W-K) 滤子 Whittle^[30]、Cleveland 和 Tiao^[31] 估计各个成分, 即

$$\begin{cases} \hat{T}_t = \frac{\sigma_b^2 \psi_T(B)\psi_S(B)\psi_r(F)\psi_s(F)f_T(B)f_T(F)}{\sigma_a^2 \theta(B)\theta(F)(1-B)^p(1-F)^p} x_t \\ \hat{S}_t = \frac{\sigma_c^2 \psi_T(B)\psi_S(B)\psi_r(F)\psi_s(F)f_S(B)f_S(F)}{\sigma_a^2 \theta(B)\theta(F)u(B)u(F)} x_t \end{cases} \tag{19}$$

但是一般情况下, 这些成分模型结构及参数是未知的。因为在序列谱上讨论序列的成分分解, 又考虑到式 (16) 是非平稳形式, 因而可定义序列 x_t 的伪谱密度 (power spectral density function, PSDF) 如下:

$$g_x(\omega) = \sigma_a^2 \frac{\theta(e^{i\omega})\theta(e^{-i\omega})}{(1-e^{i\omega})^p(1-e^{-i\omega})^p u(e^{i\omega})u(e^{-i\omega})}, 0 \leq \omega \leq \pi \tag{20}$$

由于 x_t 各个成分是独立可加的, 则 x_t 的谱可表示成由 3 个独立成分相加,

$$\begin{aligned} g_x(\omega) &= \frac{f_T(e^{i\omega})f_T(e^{-i\omega})}{(1-e^{i\omega})^p(1-e^{-i\omega})^p} \sigma_b^2 + \frac{f_S(e^{i\omega})f_S(e^{-i\omega})}{u(e^{i\omega})u(e^{-i\omega})} \sigma_c^2 + f_I(e^{i\omega})f_I(e^{-i\omega}) \sigma_d^2 \\ &= g_T(\omega) + g_S(\omega) + g_I(\omega) \end{aligned} \tag{21}$$

因而只需将 $g_x(\omega)$ 进行分解, 得到 $g_T(\omega)$ 、 $g_S(\omega)$ 、 $g_I(\omega)$, 再由 W-K 滤子即可计算出 x_t 各个成分

的一个可行分解。

由 psdf 的定义及 $g(\omega)$ 关于 ω 对称, 可知 x_t 与各个成分的谱必然是关于 $\zeta = \cos\omega$ 的有理函数, 因此式 (21) 可以写成

$$h_x(\zeta) = h_T(\zeta) + h_S(\zeta) + h_I(\zeta) \quad (22)$$

又记 $\Theta(\zeta) = \theta(e^{i\omega})\theta(e^{-i\omega})$, $\Psi_T(\zeta) = \psi_T(e^{i\omega})\psi_T(e^{-i\omega})$, $\Psi_S(\zeta) = \psi_S(e^{i\omega})\psi_S(e^{-i\omega})$ 。

从而得到

$$h_x(\zeta) = \frac{\Theta(\zeta)}{\Psi_T(\zeta)\Psi_S(\zeta)} = \frac{Q_T(\zeta)}{\Psi_T(\zeta)} + \frac{Q_S(\zeta)}{\Psi_S(\zeta)} + k(\zeta) \quad (23)$$

将式 (23) 分解成第二个等号后面的形式需要一些技巧。为了找到一个可行解, 首先, 可将 $k(\zeta)$ 看作 $\frac{\Theta(\zeta)}{\Psi_T(\zeta)\Psi_S(\zeta)}$ 商 (整) 函数先求出来。例如, 当 $\theta(B) = 1 - \beta B^2$, $\psi_T(B)\psi_S(B) = 1 - B^2$, 则此时 $k(\zeta) = \beta$ 。^①

其次, 再设定 $Q_T(\zeta)$ 和 $Q_S(\zeta)$ 结构, 利用多项式对应项相等求解得到一个可行分解。实际处理中, 一般先找到 $g_x(\omega)$ 的一个可行分解, 然后对可行分解施加正则 (canonical) 约束找到最优的分解。

2. 一个典型分解示例

该方法的分解较为复杂, 对于经典的航线模型其分解得到的结果都显得极为烦冗。为更好阐述分解过程又不显繁杂, 本节仅考察一个周期为 2 的季节模型如下:

$$(1 - B^2)x_t = (1 + B)(1 - B)x_t = a_t, a_t \sim (0, \sigma_a^2) \quad (24)$$

利用式 (20) 和式 (21) 的结果, x_t 、趋势循环成分和季节成分三个序列的 psdf 分别可写成式 (25) 的形式:

$$\begin{cases} g_x(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{(1 - e^{2i\omega})(1 - e^{-2i\omega})} = \frac{\sigma_a^2}{4(1 - \cos^2\omega)} \\ g_T(\omega) = \frac{\sigma_b^2}{(1 - e^{i\omega})(1 - e^{-i\omega})} = \frac{\sigma_b^2}{2(1 - \cos\omega)} \\ g_S(\omega) = \frac{\sigma_c^2}{(1 + e^{i\omega})(1 + e^{-i\omega})} = \frac{\sigma_c^2}{2(1 + \cos\omega)} \end{cases} \quad (25)$$

令 $\zeta = \cos\omega$, $h_x(\zeta) = \frac{\sigma_a^2}{4(1 - \zeta^2)} = \frac{Q_T(\zeta)}{\Psi_T(\zeta)} + \frac{Q_S(\zeta)}{\Psi_S(\zeta)} + k(\zeta)$, 其中 $\Psi_T(\zeta) = 2(1 - \zeta)$, $\Psi_S(\zeta) = 2(1 + \zeta)$ 。

根据前文关于 $k(\zeta)$ 求解的讨论可知, $k(\zeta) = 0$, 则

$$\frac{\sigma_a^2}{4(1 - \zeta^2)} = \frac{\eta_0}{2(1 - \zeta)} + \frac{\eta_1}{2(1 + \zeta)}, \text{ 从而 } \eta_0 = \eta_1 = \sigma_a^2/4, \text{ 即 } Q_T(\zeta) = Q_S(\zeta) = \sigma_a^2/4 \text{ 从而得到一个可行分解}$$

$h_T(\zeta) = \frac{\sigma_a^2}{8(1 - \zeta)}$; $h_S(\zeta) = \frac{\sigma_a^2}{8(1 + \zeta)}$; $h_I(\zeta) = 0$ 。将该结果与式 (25) 对应分析, 当 $\zeta = -1$, 即 $\omega = \pi$ 时, $g_T(\omega)$ 取得最小值 $\sigma_b^2/4$, $h_T(\zeta)$ 最小值 $\sigma_a^2/16$; 当 $\zeta = 1$, 即 $\omega = 0$ 时, $g_S(\omega)$ 取得最小值 $\sigma_c^2/4$, $h_S(\zeta)$ 最小值 $\sigma_a^2/16$ 。由此得出结论 $\sigma_a^2 = 4\sigma_b^2 = 4\sigma_c^2$ 。

该分解并不唯一, 满足下面条件的 (γ_T 、 γ_S 为常数) $h_T^*(\zeta)$ 、 $h_S^*(\zeta)$ 、 $h_I^*(\zeta)$ 也是可行的分解, 即

$$h_T^*(\zeta) = h_T(\zeta) - \gamma_T \geq 0, h_S^*(\zeta) = h_S(\zeta) - \gamma_S \geq 0, h_I^*(\zeta) = h_I(\zeta) + \gamma_T + \gamma_S \geq 0 \quad (26)$$

最优分解 $h_T^*(\zeta)$ 、 $h_S^*(\zeta)$ 、 $h_I^*(\zeta)$ 是当式 (27) 成立时, 有

$$\gamma_T = \min[h_T(\zeta)] = \sigma_b^2/4, \gamma_S = \min[h_S(\zeta)] = \sigma_c^2/4 \quad (27)$$

式 (27) 被称之为 canonical 约束, 在该约束下得到最优分解

$$\begin{cases} g_T^*(\omega) = h_T^*(\zeta) = \frac{\sigma_b^2}{2(1 - \cos\omega)} - \frac{\sigma_b^2}{4} = \frac{\sigma_b^2(1 + \cos\omega)}{4(1 - \cos\omega)} \\ g_S^*(\omega) = h_S^*(\zeta) = \frac{\sigma_c^2}{2(1 + \cos\omega)} - \frac{\sigma_c^2}{4} = \frac{\sigma_c^2(1 - \cos\omega)}{4(1 + \cos\omega)} \\ g_I^*(\omega) = h_I^*(x) = \sigma_c^2/2 = \sigma_a^2/8 \end{cases} \quad (28)$$

① 此时可计算得到 $\Theta(\zeta) = 1 + \beta^2 + 2\beta(2\zeta^2 - 1)$, $\Psi_T(\zeta)\Psi_S(\zeta) = 4(1 - \zeta^2)$ 。

将 $\cos\omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \frac{F+B}{2}$ 代入式 (28) $g^*(\omega)$ 中, 得到式 (29) 和式 (31) 的 $g^*(B, F)$ 如下:

$$g_r^*(B, F) = \frac{\sigma_b^2 \left(1 + \frac{B+F}{2}\right)}{4 \left(1 - \frac{B+F}{2}\right)} = \frac{\sigma_b^2 (2+B+F)}{4(2-B-F)} \quad (29)$$

$$g_s^*(B, F) = \frac{\sigma_b^2 (2-B-F)}{4(2+B+F)} \quad (30)$$

$$g_x(B, F) = \frac{\sigma_a^2}{4 \left[1 - \left(\frac{B+F}{2}\right)^2\right]} = \frac{\sigma_a^2}{4 - (B+F)^2} \quad (31)$$

由 W-K 滤子, 即可从原序列分离得到各个成分

$$\hat{T}_t = \frac{g_r^*(B, F)}{g_x(B, F)} x_t, \hat{S}_t = \frac{g_s^*(B, F)}{g_x(B, F)} x_t, \hat{I}_t = x_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t \quad (32)$$

在利用式 (32) 计算各个成分时, 需要对原序列向前和向后预测扩展数据, 以满足上面滤子计算端点值的要求。

Maravall 和 Pierce^[32] 从自协方差和滤子分解角度分析给出了这个模型的解析解。本文利用式 (29) ~ 式 (32) 结果也可以很方便地得到 \hat{T}_t 、 \hat{S}_t 、 \hat{I}_t 解析解, 结果与之一致,

$$\begin{aligned} \hat{T}_t &= \frac{\frac{\sigma_b^2 (2+B+F)}{4(2-B-F)} a_t}{\frac{\sigma_a^2}{4 - (B+F)^2}} = \frac{a_t (2+B+F)^2}{16(1+B)(1-B)} \\ &= \frac{a_t (1+B) + 2(1+F) + (1+B)F^2}{16(1-B)} = \frac{a_t (1+B)(1+F)^2}{16(1-B)} \end{aligned}$$

同理, $\hat{S}_t = \frac{a_t (1-B)(1-F)^2}{16(1+B)}$, 而 $\hat{I}_t = Y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$ 计算如下:

$$\begin{aligned} \hat{I}_t &= Y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t = \frac{a_t}{1-B^2} - \frac{a_t (1+B)(1+F)^2}{16(1-B)} - \frac{a_t (1-B)(1-F)^2}{16(1+B)} \\ &= \frac{a_t 16 - [(1+F)(1+B) + (1-B)(1-F)]^2 + 2(1-B^2)(1-F^2)}{16(1-B)(1+B)} = \frac{(1-F^2)a_t}{8} \end{aligned}$$

由此, SEATS 方法通过对上述分解加 canonical 约束, 从而获得了该约束下的最优分解, 得到平滑的趋势和季节成分, 而不规则成分的方差则被最大化。但也可观察到, 即便是非常简单的季节模型典型分解过程和形式都比较复杂, 这限制了模型的使用范围。

3 季节调整研究的新发展

以上对两种主流季节调整方法的核心工作原理进行了分析, 很多细节性的问题都被忽略。例如, 在建模阶段依赖系统自动选择模型、估计参数, 但模型对新加入的数据极为敏感, 这类问题 Dosse 和 Planas^[33] 做了讨论。此外, 季节调整的其他问题, 如相位滞后、季节调整诊断、虚假单位根等也在探讨中, 成为季节调整研究的新方向。

正如 Findley^[34] 所说, 季节调整和趋势的估计是一个平滑与相位滞后之间平衡的问题。季节调整可以提取趋势成分以方便研究经济周期, 但与此同时带来的长期趋势转折点滞后的问题却又让这个优势打了折扣。由式 (8) 定义相位滞后函数为

$$v(\omega) = -\frac{P(\omega)}{\omega} \quad (33)$$

当 $v(\omega) < 0$ 时, 表示相位滞后, 反之表示超前, 该数值解释为滞后的期数。例如, 滤子 $\sum_{j=0}^{11} B^j$ 是一个

月度季节加总滤子, 则 $v(\omega) = -\frac{\arctan\left(\frac{1-e^{-i12\omega}}{1-e^{-i\omega}}\right)}{\omega} = 5.5$ 是一个常数, 表明使用这个滤子会让变换后序列的趋势转折比原序列的趋势转折滞后 5.5 个月。Findley 和 Martin^[26] 用 Hillmer 和 Tiao^[14] 的航线模型做经验分析时发现季节调整后序列在不同频率上表现出了 2~4 个月的相位滞后, 他们还认为这种滞后时间的长度可以预测, 并且随着序列长度增加这种滞后现象会逐渐减弱。此外, X11 方法中用 Henderson 滤子第二次提取趋势成分的时候, 由于没有前向后向预测值可以使用, 而使用 Musgrave 非对称滤子替代, 这也会引起相位滞后问题。依据具体使用的 Musgrave 滤子, 用式 (33) 定义的计算方法也可以计算出理论相位滞后值。

在季节调整的诊断方面, Maravall^[35] 指出, 尽管 SEATS 是基于模型的方法, 这让基于参数的统计检验推断实现起来应该容易, 但实际上这种诊断方法并未建立起来。在 SEATS 方法中, 可行分解并不唯一, 通过三个成分之间相互转移方差即可得到一个可行分解。典型分解要求不规则成分的方差最大化, 但是这种最大化是基于已经识别了的特定 ARIMA 模型, 对数据本身而言则可能还有改善空间。Maravall^[35] 使用统计量 $\tau^{\text{SEATS}} = \bar{I}^2 - \sigma_a^2 (\sigma_{\text{WK}}^2 / \sigma_a^2)$ (式中, \bar{I}^2 表示不规则成分均方和; $\sigma_{\text{WK}}^2 / \sigma_a^2$ 表示用 W-K 滤子所决定的不规则成分方差占模型中残差方差的比) 诊断季节成分是否过度调整, 可以通过季节成分的稳定性判断, 如果季节成分过于稳定, 几乎没有随机性, 则认为是过度调整 (overadjust); 而如果季节成分随机性过大, 则表示调整不足 (underadjust)。Findley 和 McElroy^[36] 指出 Maravall^[35] 的方法并不可靠, 从不规则成分方差是否被低估或高估角度, 提出了用 $\frac{1}{N} \text{tr}(\Omega_{i/\sigma_a^2})$ 替代 τ^{SEATS} 中的 $\sigma_{\text{WK}}^2 / \sigma_a^2$ (Ω_{i/σ_a^2} 表示方差协方差矩阵)。此外, 如果调整后序列在季节频率的谱值为 0, 则可视为过度调整, 但是这个不能当作一个标准而只能视为一个证据。而 McElroy 和 Wildi^[37] 在所谓的“实时滤子”信号提取模型下, 讨论了用修正误差方差作为季节性模型信号提取优劣的标准, 并认为这可作为传统的检验残差白噪声的一个有益补充。

在季节调整中的虚假单位根讨论方面, Hylleberg^[38] 指出, “单位根可能只存在某几个季节”, 而 $1-B^{12}$ 算子让所有根都在单位圆上, 这种设定可能是错误的, 存在虚假单位根的可能。Bell^[39] 讨论了各类线性滤子中的单位根, 如基于模型方法中常用到的差分滤子 $(1-B)^d$ 、季节加总滤子 $(1+B+\dots+B^{-1})$ 。基于 X11 方法的各类移动平均滤子, 包括对称的和非对称的, 这些滤子中所包含单位根是否会带来或消除固定性季节成分和时间趋势的多项式, 如 X11 中的 Henderson 滤子 $H(B)$ 提取趋势成分后的运算中包含了 $1-H(B)$, 而 Bell 证明 $1-H(B)$ 中包含了 $(1-B)^2 (1-F)^2$ 因子, 在和季节滤子复合使用后将出现 $(1-B)^3 (1-F)^3$, 这样就会因消除时间趋势的 5 次方而产生固定的季节性成分。Wildi^[40] 提出了实时滤子法 (direct filter approach, DFA), 旨在克服有限样本的相位滞后较大和虚假单位根的问题。该方法从频域角度分析, 构造了 ZPC-QMP 滤子, 滤子参数估计通过最小化如下频域表达式得到:

$$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-[N/2]}^{[N/2]} |\Gamma(\omega_k) - \hat{\Gamma}(\omega_k)|^2 I_{NX}(\omega_k)$$

式中, $\Gamma(\omega_k)$ 表示传递函数; 原序列的谱 $I_{NX}(\omega_k)$ 在这里作为权重。作者证明了上述表达式实际上是 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \hat{Y}'_i)^2$ 的近似 (相差高阶无穷小), \hat{Y}_i 是对称滤子的估计结果, 而 \hat{Y}'_i 是非对称滤子的估计结果。所以, 该方法实际上是加权修正误差估计方法在频域上的逼近。而在频域上, 这种结果恰好可解释为将非对称滤子引起的相位减到最小。

4 结语

本文探讨了 X-11 方法和 TRAMO-SEATS 两种季节调整方法中序列预调整和季节调整的基本原理。两个季节调整方法的序列预调整原理较为类似, 而季节调整模块的工作原理却大不相同。在讨论 X-11 原理时, 从频域分析的 3 个方面——频率、振幅和相位, 分析了移动平均变换原理, 并讨论了如何根据需要构造移动平均滤子, 这些理论构成了 X11 方法的基础, 之后介绍了 X11 方法的季节调整的工作流程。在讨

论 SEATS 的原理时, 首先介绍了典型分解的基本理论, 其次以范例进行了完整的模型分解阐述。

在文章最后介绍了目前季节调整研究中兴起的相位滞后、季节调整诊断和虚假单位根等几个研究方向。这些理论性问题看似属于对核心原理的补充, 但也对季节调整的效果起到关键的影响作用。考虑到季节调整应用范围较广, 加之国内研究其理论的文献较少, 因此无论从理论还是应用层面, 季节调整依然是一个非常值得研究的热点领域。综上所述, 尽管季节调整技术已经渐趋成熟, 但上文提到的这些问题是未解决并正在研究中的问题, 依然可以作为下一步研究的起点。

参考文献:

- [1] Yule G U. On the time-correlation problem, with especial reference to the variate-difference correlation method [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1921, 84 (4): 497-537.
- [2] Britten R H, Sydenstricker E. Mortality from pulmonary tuberculosis in recent years [J]. Public Health Reports, 1922, (37): 2843-2858.
- [3] Macaulay F R. The smoothing of time series [R]. New York: National Bureau of Economic Research, 1931.
- [4] Falkner H D. The measurement of seasonal variation [J]. Journal of the American Statistical Association, 1924, (19): 167-179.
- [5] Joy A, Thomas W. The use of moving averages in the measurement of seasonal variations [J]. Journal of the American Statistical Association, 1928, (23): 241-252.
- [6] Shiskin J, Young A H. The X-11 variant of the census method II seasonal adjustment program [R]. Technical paper, 1967.
- [7] Dagum E B. Seasonal factor forecasts from arima models [J]. Bulletin of the International statistical Institute, 1975, (2): 206-219.
- [8] Dagum E B. The X-11-Arima seasonal adjustment method [J]. Statistics Canada, 1980, (1): 26-39.
- [9] Findley D F, Monsell B C. New capabilities and methods of the X-12- Arima seasonal- adjustment program [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 1998, (16): 127-152.
- [10] Whittle P. Tests of fit in time series [J]. Biometrika, 1952, 39 (3/4): 309-318.
- [11] Harvey A C. Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter [M]. Cambridge: Cambridge university press, 1989.
- [12] Box G E P, Hillmer S. Analysis and modeling of seasonal time series [J]. In Seasonal Analysis of Economic Time Series: NBER, 1978: 309-344.
- [13] Burman J P. Seasonal adjustment by signal extraction [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1980, (143): 321-337.
- [14] Hillmer S C, Tiao G C. An arima-model-based approach to seasonal adjustment [J]. Journal of the American Statistical Association, 1982, (77): 63-70.
- [15] Bell W R, Hillmer S C. Issues involved with the seasonal adjustment of economic time series [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 1984, (2): 291-320.
- [16] Gómez V, Maravall A. Programs Tramo and Seats, Instruction for User (beta version: September 1996) [M]. Banco de España, 1996.
- [17] Gómez V, Maravall A. Estimation, prediction, and interpolation for nonstationary series with the kalman filter [J]. Journal of the American Statistical Association, 1994, (89): 611-624.
- [18] Caporello G, Maravall A. Program Tsw (Revised manual) [M]. Banco de España, 2004.
- [19] 夏春. 实际经济时间序列的计算、季节调整及相关经济含义 [J]. 经济研究, 2002, (3): 36-43+94.
Xia C. Calculation of real economic time series, seasonal adjustment and some economic implications [J]. Economic Research Journal, 2002, (3): 36-43+94. (in Chinese)
- [20] 张鸣芳. 国际上季节调整最新发展及对我国的思考 [J]. 统计研究, 2006, (10): 14-18.
Zhang M F. the latest international evolution of seasonal adjustment and considerations about China [J]. Statistical Research, 2006, (10): 14-18. (in Chinese)
- [21] 范维, 张磊. 季节调整方法综述及比较 [J]. 统计研究, 2006, (2): 70-73.
Fan W, Zhang L. The comprehensive description and comparison of seasonal adjusting methods [J]. Statistical Research, 2006, (2): 70-73. (in Chinese)
- [22] 王群勇. 中国季度 GDP 的季节调整: 结构时间序列方法 [J]. 统计研究, 2011, 28 (5): 78-83.
Wang Q Y. Seasonal adjustment of China quarterly GDP [J]. Statistical Research, 2011, 28 (5): 78-83. (in Chinese)

- [23] Maravall A, Pérez D. Applying and interpreting model-based seasonal adjustment—the euro-area industrial production series [J]. *Economic Time Series: Modeling and Seasonality*, 2012, (3): 281-305.
- [24] 栾惠德, 张晓峒. 季节调整中的春节模型 [J]. *经济学 (季刊)*, 2007, (2): 707-722.
Luan H D, Zhang X T. A Spring Festival Model for Seasonal Adjustments [J]. *China Economic Quarterly*, 2007, (2): 707-722. (in Chinese)
- [25] 陈雄强, 张晓峒. 货币供应量的实时监测——基于季节调整方法 [J]. *上海经济研究*, 2011, (7), 26-34.
Chen X Q, Zhang X T. Real-time monitoring for money supply: Based on seasonal adjustment approach [J]. *Shanghai Journal of Economics*, 2011, (7), 26-34. (in Chinese)
- [26] Findley, D F, Martin D E K. Frequency Domain Analyses of Seats and X-11/12-Arima Seasonal Adjustment Filters for Short and Moderate-Length Time Series [J]. *Journal of Official Statistics*, 2006, 22 (1): 1-33.
- [27] 中国人民银行. 时间序列 X-12-Arima 季节调整: 原理与方法 [M]. 北京: 中国金融出版社, 2007.
P B C. Time Series X-12-Arima Seasonal adjustment: Theory and approach [M]. Beijing: China Financial Express, 2007. (in Chinese)
- [28] Alexandrov T, Bianconcini S. A review of some modern approaches to the problem of trend extraction [J]. *Econometric Reviews*, 2012, 31 (6): 593-624.
- [29] Wallis K F. A comment to Findley et al [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1998, (16): 230-243.
- [30] Whittle P. *Prediction and Regulation by Linear Least-Square Methods* [M]. London: English Universities Press, 1963.
- [31] Cleveland W P, Tiao G C. Decomposition of seasonal time series: A model for the census X-11 program [J]. *Journal of the American statistical Association*, 1976, (71): 581-587.
- [32] Maravall A, Pierce D A. A prototypical seasonal adjustment model [J]. *Journal of Time Series Analysis*, 1987, (8): 177-193.
- [33] Dosse J, Planas C. Revisions in seasonal adjustment methods: An empirical comparison of X-12-Arima and seats [R]. Eurostat working group document ND3/SA/08, Luxembourg: 1996.
- [34] Findley D F. Some recent developments and directions in seasonal adjustment [J]. *Journal of Official Statistics*, 2005, 21 (2): 343-352.
- [35] Maravall A. A class of diagnostics in the arima-model-based decomposition of a time series [R]. *Seasonal Adjustment*, 2003.
- [36] Findley D F, McElroy T S. Modifications of seats' diagnostic for detecting over- or underestimation of seasonal adjustment decomposition components [R]. Working Paper, 2005.
- [37] Hylleberg S. Comment to Findley [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1998, (16): 427-432.
- [38] McElroy T, Wildi M. Signal extraction revision variances as a goodness-of-fit measure [J]. *Journal of Time Series Econometrics*, 2010, 2 (1): 378-394.
- [39] Bell W R. Trend extraction [J]. *Econometric Reviews*, 2012, (31): 593-624.
- [40] Wildi M. *Signal Extraction: Efficient Estimation, 'Unit Root' -tests and Early Detection of Turning Points* [M]. Springer, 2004.

Theoretical Analysis of Seasonal Adjustment

Zhang Xiaotong¹, Nie Siyue²

1. School of Economics, Nankai University, Tianjin 300071, China;

2. Institute of Management and Decision, Shanxi University, Taiyuan 03006, China

Abstract: In this paper, two main seasonal adjustment methods were analyzed, combined with samples illustrated. The theoretical analyzed part introduces the pre-adjustment methods, regARIMA and TRAMO firstly, and then discussed the seasonal adjustment theory of the two main seasonal adjustment methods. The X11 seasonal adjustment principle was discussed based on the moving average filter from an analysis in the frequency domain. The SEATS method was discussed from the perspective of the signal extraction theory. Finally, there were still shortages for the current seasonally adjustment methods, and we pointed out some directions that are developing for further researches.

Key words: Seasonal Adjustment; X11; Moving Average Filters; TRAMO-SEATS