

焦点决策理论的原理^①

郭沛俊¹, 马修岩²

(1. 日本横滨国立大学 经营学部, 横滨; 2. 大连理工大学 经济管理学院, 大连 116024)

摘要: 焦点决策理论 (focus theory of choice) 是郭沛俊在 2019 年提出的新的不确定系统下的决策理论。这个理论首次对 1978 年诺贝尔经济学奖获得者 Simon 教授提出的决策过程合理性 (procedural rationality) 进行了公理化。焦点决策理论的核心主张是决策者会选取一个决策作为最佳决策, 因为影响这个决策的结果的所有状态里存在一个最让决策者注目的状态。因此焦点决策理论将决策过程分为两个步骤: 第一步, 对于每一个决策, 决策者从所有的状态里选取令决策者注目的状态; 第二步, 从被选取的状态里再选取最注目的状态, 这个状态对应的决策就是最佳决策。焦点决策理论可以解释很多著名的悖论, 如圣彼得堡悖论、Allais 悖论和 Ellsberg 悖论, 以及违反随机支配的现象等。这个理论还将风险下的决策、不确定性下的决策和无知下的决策统一到同一的决策系统。本文将简略介绍焦点决策理论的基本思路和特点, 介绍如何用焦点决策理论去选择最优决策, 并用报童模型来说明。

关键词: 焦点决策理论; 决策过程合理性; 报童模型

中图分类号: C934 **文献标识码:** A **文章编号:** (2019) 01-0001-10

0 引言

决策理论是研究如何从多个可选的决策方案中作出一个最佳的决策。一般情况下, 在采取行动之前, 决策者不会知道所作出的决策会出现什么结果。这种未知情况可以分为三类: 风险、不确定性和无知。根据 Knight^[1] 的观点, 风险 (risk) 是指决策者可以知道所有可能结果的客观概率, 而不确定性是指无法得到所有可能结果的客观概率, 只能用主观概率来反映决策者对于各个结果可能发生的信念 (belief)。当没有信息可用来区分哪个结果更有可能发生时, 无知就会发生。不同的未知情况需要不同的决策理论。涉及无知下的决策规则包括 maximin, maximax, minmax regret 和 Hurwicz 准则。von Neumann 和 Morgenstern^[2] 的期望效用理论适用于风险下的决策, 而 Savage^[3] 的主观期望效用理论适用于不确定性下的决策。

由 von Neumann 和 Morgenstern^[2] 公理化的期望效用理论和由 Savage 公理化的主观期望效用理论是风险和不确定性决策的基础。然而, Allais^[4] 和 Ellsberg^[5] 的假设性实验结果表明, 人们在做决策时会系统性地违反期望效用理论和主观期望效用理论的公理。此后, Allais 悖论和 Ellsberg 悖论一直是决策科学研究的试金石。在过去的三十年里, 人们提出了一系列新的决策理论来解决这些问题^[6-12]。然而, 新理论的诞生通常会引发新的实证研究来检验其有效性, 而产生新的悖论, 对此, 相关文献已经进行了全面的综述^[13,14]。期望效用理论, 主观期望效用理论以及由它们衍生出来的新的决策理论本质上都是贝努里 (Bernoulli) 期望值框架下的加权平均。最近 10 多年有大量的心理学实验显示决策过程不太可能是基于加权求和的过程^[15-17]。在 Zhou 等^[17] 的论文中, 决策者被要求完成两项任务: 比例任务和概率任务; 用视线跟踪和路径扫描的方法得到的数据显示, 在比例任务中, 决策者的信息处理次序更加符合加权求和的过程, 而在概率任务中却没有显示出与比例任务相似的信息处理模式。

① 作者简介: 郭沛俊 (1969—), 山西人, 博士, 横滨国立大学经营学部教授, 研究方向: 决策科学、管理科学、运筹学, E-mail: guo@ynu.ac.jp; 马修岩 (1988—), 山东人, 博士, 大连理工大学经济管理学院讲师, 研究方向: 管理科学, E-mail: max@dlut.edu.cn。

Guo^[18]提出了一次性决策理论 (one-shot decision theory)。一次性决策理论和已有的用于风险和不确定性下的决策理论有着本质的区别。传统的决策理论 (如期望效用理论和主观期望效用理论) 是一种加权平均模型, 它们用效用函数的形状 (凸函数, 凹函数, 线性函数) 来反映决策者对风险的态度; 而一次性决策理论是一种新的基于事件的决策模型, 它用决策者关注什么样的事件 (这个被关注的事件我们称它为焦点事件) 来解释决策者对风险的态度。例如, 期望效用理论用效用函数是凸地来解释某个人为什么买彩票而一次性决策理论用这个人更关注买彩票而中奖这个事件 (焦点事件) 来解释。根据焦点事件发生的概率和带来的收益我们将焦点事件分成 12 种类型, 而将关注不同类型的焦点事件的决策者也分成了相应的 12 种类型。例如, 我们将发生概率相对大又能带来相对高的收益的焦点事件定义为积极焦点事件 (active focus) 而将关注这种焦点事件的决策者称之为积极型决策者 (active decision maker)。一次性决策理论已经应用于拍卖问题^[19]、创新型产品的报童问题^[20,21], 多阶段决策^[22,23], 创新型产品的双寡头市场^[24,25]和房地产投资^[26]等多种问题的研究中^[27]。

Guo^[28,29]提出了焦点决策理论。这个理论将一次性决策理论中的 12 种焦点事件用正和负两个评价系统统一起来, 并将 Simon 教授提出的决策过程合理性 (procedural rationality) 进行了公理化。焦点决策理论可以解释很多著名的悖论, 如圣彼得堡悖论、Allais 悖论和 Ellsberg 悖论, 以及违反随机支配 (violations of stochastic dominance), 偏好反转 (preference reversals), 事件分割效应 (the event-splitting effect) 等现象。这个理论还将风险下的决策、不确定性下的决策和无知下的决策统一到同一的决策系统。

本文的其余部分安排如下。第 1 部分, 简介焦点决策理论, 并用示例来说明; 第 2 部分给出了焦点决策理论的数理模型; 在第 3 部分, 利用焦点决策理论, 我们给出了报童问题的分析过程; 第 4 部分是结论和展望。

1 焦点决策理论的简介及示例分析

在焦点决策理论中, 决策者同时具有两个不同的评价系统: 正评价系统 (positive evaluation system, PES) 和负评价系统 (negative evaluation system, NES)。

在正评价系统中, 对于每个决策者从和这个决策相关的所有事件中, 选出一个以较高的概率带来较好收益的事件 (每个决策中最吸引人的事件), 这个事件被称为这个决策的正焦点事件 (positive focus); 在选出的各个决策的正焦点事件中再选出以较高的概率带来较好的收益的事件 (所有正焦点事件中最吸引人的事件); 这个事件对应的决策是正评价系统的最优决策。

在负评价系统中, 对于每个决策者从和这个决策相关的所有事件中, 选出一个以较高的概率带来较差收益的事件 (每个决策中最令人担心的事件), 这个事件被称为这个决策的负焦点事件 (negative focus); 在选出的各个决策的负焦点事件中再选出以较小的概率带来较好的收益的事件 (所有负焦点事件中最可以接受的事件); 这个事件对应的决策是负评价系统最优决策。

尽管一个决策者同时具有正评价系统和负评价系统, 但通常情况下只有一个系统是被激活的, 而另一个是潜在的。哪个系统被激活用来选择最佳决策与决策者的性格特征密切相关。例如, 乐观决策者通常具有显性的正评价系统, 而悲观决策者通常负评价系统是显性的。另外, 哪个评价系统被激活也受决策框架影响 (framing effect)。当问题以消极的方式表达或此问题对决策者至关重要或影响严重时, 消极评价系统就会变得明显。如果两个系统被同时激活, 这将导致决策者一会儿关注正焦点事件, 一会儿关注负焦点事件。这可以用来解释为什么决策者在作决策时犹豫不决甚至无法作出决策。

越来越多的证据显示, 在一个决策所产生的众多结果中决策者会对某些结果给予更多的关注^[30-32]。更有趣的是, Stewart 等^[16]在分析决策者选择彩票 (一个彩票对应一个概率分布) 时的眼球运动信息后指出, 决策者会选自己注视最多的彩票。这些证据都有力地支持了焦点决策理论的基本假设。

下面我们将用几个例子来进一步说明焦点决策理论的基本思想。第一个例子是无知下的决策。在这种情况下, 由于我们无法判断哪个事件更容易发生, 我们就认为所有事件都会以相同的概率发生。在正评价系统中, 使一个决策产生最高收益的事件是这个决策的正焦点事件; 然后, 决策者在所有正焦点事件中选出能带来最高收益的焦点事件, 它对应最优决策。这个过程与无知下的 maximax 准则是完全一致的。相

反，在负评价系统中，使一个决策产生最低收益的事件是该决策的负焦点事件；然后决策者在负焦点事件中选择收益最高的行动。这个过程与无知下的 maximin 准则是一样的。另外，Hurwitz 准则对应的是正评价系统和负评价系统同时被激活的情况，而乐观系数可用来反映正评价系统被激活次数的比例。

第二个例子是著名的“亚洲传染病”问题^[33]。这个问题被描述如下：美国正面对一种“亚洲传染病”的袭击，可能造成 600 人的死亡。现在有 A 和 B 两种应对方案。方案 A：200 人会获救；方案 B：600 人全部获救的概率为 1/3，全部死亡的概率为 2/3。如果换另一种表述方法，方案 A：400 人会死亡；方案 B：无人死亡的概率为 1/3，600 人全部死亡的概率为 2/3。

尽管只是换了表达问题的方式，但 Tversky 和 Kahneman 的实验显示绝大多数的回答者会一开始选 A，但当表述方式改变后会选 B。依照期待效用理论，应该是都选 A 或都选 B。Tversky 和 Kahneman 用这个实验提出了决策框架效应（framing effect）的概念并指出了它在决策的重要作用。下面我们用焦点决策理论来解释“亚洲传染病”问题。

第一种表述强调生存，是一种正面表述方式，因此受访者在考虑该问题时会激活正评价系统。方案 A 的正焦点事件是 200 人被救的事件，因为它是方案 A 带来的唯一事件；方案 B 的正焦点事件是 600 人以 1/3 的概率全部获救的事件，因为它比方案 B 带来的另一个事件（600 人有 2/3 的概率全部死亡）更有吸引力。然后决策者对这两个正焦点事件进行比较，由于决策者更看重确定效应（certain effect），也就是他会认为 200 人确切获救的事件比 600 人以 1/3 的概率获救的事件要好。因此，决策者决定选择方案 A。

第二种表述强调死亡，是一种负面表述方式，因此当考虑到这个问题时负评价系统会被激活。方案 A 的负焦点事件是 400 人死亡的事件，因为它是方案 A 的唯一事件，而方案 B 的负焦点事件是 600 人有 2/3 的概率全部死亡的事件，因为它比方案 B 的另一个事件更让人担忧。然后，决策者比较这两个负焦点事件，认为 400 人的确定死亡比 600 人有 2/3 的概率全部死亡更让人难以接受。所以决策者决定选择方案 B。上述解释与给出的解释完全相同^[33]。

第三个例子是违反随机支配的例子^[33]。有两种决策（称为彩票），由不同颜色的弹子的百分比和相应的收益来描述（表 1）。请从“彩票” I 和“彩票” II 中选择一个你喜欢的。

表 1 “彩票” I 和“彩票” II 的数据

Table 1 Data of lotteries I and II

类别	决策方案			
	“彩票” I	90% 白色 0 美元	6% 红色 赢 45 美元	1% 绿色 赢 30 美元
“彩票” II	90% 白色 0 美元	7% 红色 赢 45 美元	1% 绿色 输 10 美元	2% 黄色 输 15 美元

很明显“彩票” II 随机支配“彩票” I。依照期待效用理论，彩票” II 应该比“彩票” I 好。然而，Tversky 和 Kahneman^[33]进行的实验表明，大多数受试者（58%）选择被随机支配的“彩票” I。

我们用焦点决策理论的正评价系统来分析这个问题。现在有两个决策：选择“彩票” I 和“彩票” II。“彩票” I 的正焦点事件是以 6% 的概率赢得 45 美元，“彩票” II 的正焦点事件是以 7% 的概率赢得 45 美元，它们分别是“彩票” I 和“彩票” II 的最吸引人的事件。决策者比较了这两个决策的正焦点事件，觉得它们几乎没什么差别。然后，决策者进一步考虑“彩票” I 和“彩票” II 的第二个吸引人的事件（称之一阶正焦点事件），即以 1% 的概率赢得 30 美元（“彩票” I）和以 90% 的概率赢得 0 美元（“彩票” II）。由于 1% 的概率赢得 30 美元比 90% 中奖机会赢得 0 美元要好，因此决策者选择“彩票” I。我们称这种方式为焦点事件的字典式排序（lexicographical dominance）。

Guo^[28,29]给出了焦点决策理论的公理化系统并解决了很多著名的决策悖论，如圣彼得堡悖论、Allais 悖论和 Ellsberg 悖论，以及违反随机支配（violations of stochastic dominance），偏好反转（preference reversals），事件分割效应（the event-splitting effect）等现象。接下来一节将介绍焦点决策理论的数理模型框架。

2 焦点决策理论的数理模型

事件 x 的集合为 S , 一个事件 x 发生的概率为 $p(x)$, 我们有如下定义。

定义 1 (相对似然函数)

函数 $\pi: S \rightarrow [0, 1]$, 如果它满足对任意的 $x_1, x_2 \in S, \pi(x_1) > \pi(x_2) \Leftrightarrow p(x_1) > p(x_2)$, 而且存在 $x_c \in S$ 满足 $\pi(x_c) = \max_{x \in S} \pi(x) = 1$, 我们称它为相对似然函数。

对于任意 $x \in S, \pi(x)$ 被称为 x 的相对似然度。从定义 1 可知, 一个事件的概率越高, 它的相对似然度就越高。 $\pi(x)$ 用来表示 $p(x)$ 的相对位置。

决策 a 的集合为 A 。由决策 a 和事件 x 的组合产生的结果称为收益, 表示为 $v(x, a)$ 。收益的集合是 V 。决策者对收益的满意度由满意度函数表示, 其定义如下:

定义 2 (满意度函数)

函数 $u: V \rightarrow [0, 1]$, 如果它满足对任意的 $v_1, v_2 \in V, u(v_1) > u(v_2) \Leftrightarrow v_1 > v_2$, 而且存在 $v_c \in V$ 满足 $u(v_c) = \max_{v \in V} u(v) = 1$, 我们称为它为满意度函数。

对于任意 $x \in S$ 和 $a \in A, u(v(x, a))$ 称为决策 a 在 x 上的满意度, 为简洁起见, 接下来本文将使用 $u(x, a)$ 代替 $u(v(x, a))$ 。 $v(x, a)$ 用来表示 $v(x, a)$ 的相对位置。

下面我们给出正评价系统的数学描述。

正焦点事件

对于一个给定的决策 a , 设定

$$\max_{x \in S} \min \{ \varphi * \pi(x), u(x, a) \} \tag{1}$$

的最优解集合为 $X_+^*(a)$ 。这里 φ 是个预先给定的正实数。式 (1) 的一个最优解 $x_+^*(a)$ 是决策 a 的正焦点事件如果对于任意一个非 $x_+^*(a)$ 的 $X_+^*(a)$ 的元素 $x, x_+^*(a)$ 满足

$$\begin{aligned} &\pi(x_+^*(a)) > \pi(x), u(x_+^*(a), a) \geq u(x, a), \text{ 或者} \\ &\pi(x_+^*(a)) \geq \pi(x), u(x_+^*(a), a) > u(x, a). \end{aligned}$$

显而易见, 如果 $X_+^*(a)$ 只有一个元素, 那么这个元素一定就是 a 的正焦点事件。参数 $\varphi > 0$ 表示相对于相对似然度, 决策者愿意在满意度上赋予的权重。如果设置 $\varphi = 1$, 表示决策者认为相对似然度和满意度同样重要。设置更大的 φ 意味着决策者更看重具有较小的相对似然度但较高的满意度的事件。

得到各个决策的正焦点事件后, 下面让我们考虑如何得到正评价系统的最优决策。为了简便起见, 让我们只考虑 $X_+^*(a)$ 只有一个元素的情况。

基于正焦点事件的最优决策

设定

$$\max_{a \in A} \min \{ \kappa * \pi(x_+^*(a)), u(x_+^*(a), a) \} \tag{2}$$

的最优解集合为 A_+^* 。这里 κ 是个预先给定的正实数。式 (2) 的一个最优解 a_+^* 是 a 的正评价系统的最优决策如果对于任意一个非 a_+^* 的 A_+^* 的元素 a, a_+^* 满足

$$\begin{aligned} &\pi(x_+^*(a_+^*)) > \pi(x_+^*(a)), u(x_+^*(a_+^*), a_+^*) \geq u(x_+^*(a), a), \text{ 或者} \\ &\pi(x_+^*(a_+^*)) \geq \pi(x_+^*(a)), u(x_+^*(a_+^*), a_+^*) > u(x_+^*(a), a). \end{aligned}$$

显而易见, 如果 A_+^* 只有一个元素, 那么这个元素一定就是正评价系统的最优决策。

从 (2) 我们知道, 对于任意的两个决策 $a_1, a_2 \in A$, 如果 $\pi(x_+^*(a_1)) \geq \pi(x_+^*(a_2))$ 且 $u(x_+^*(a_1), a_1) \geq u(x_+^*(a_2), a_2)$, 那么 $\min \{ \kappa * \pi(x_+^*(a_1)), u(x_+^*(a_1), a_1) \} \geq \min \{ \kappa * \pi(x_+^*(a_2)), u(x_+^*(a_2), a_2) \}$ 。因此, 由式 (2) 得到的最优决策的正焦点事件和别的决策的正焦点事件相比具有较高的相对似然度和较高的满意度。像式 (1) 的参数 φ 一样, 参数 $\kappa > 0$ 同样表示相对于相对似然度, 决策者愿意在满意度上赋予的权重。如果设置 $\kappa = 1$, 表示决策者认为相对似然度和满意度同样重要。设置更大的 κ 意味着决策者更看重具有较小的相对似然度但较高的满意度的焦点事件。因此, κ 也可以看成是决策者对风险的态度; κ 越大表明决策者越愿意承受风险。 $x_+^*(a_+^*)$ 是正评价系统的最优

决策的焦点事件, 它用来解释为什么决策者选取 a_+ 。决策者考虑各个决策的最吸引人的事件(正焦点事件)并从中选出一个以较大似然度带来较好的收益的正焦点事件; 这个被选出的正焦点事件代表决策者认为的好中的好的。因此, a_+ 适合乐观的决策者。

下面我们给出负评价系统的数学描述。

负焦点事件

对于一个给定的决策 a , 设定

$$\max_{x \in S} \min \{ \theta * \pi(x), 1 - u(x, a) \} \quad (3)$$

的最优解集合为 $X_-(a)$ 。这里 θ 是个预先给定的正实数。式(3)的一个最优解 $x_-(a)$ 是 a 的负焦点事件如果对于任意一个非 $x_-(a)$ 的 $X_-(a)$ 的元素 x , $x_-(a)$ 满足

$$\pi(x_-(a)) > \pi(x), u(x_-(a), a) \leq u(x, a), \text{ 或者}$$

$$\pi(x_-(a)) \geq \pi(x), u(x_-(a), a) < u(x, a)。$$

显而易见, 如果 $X_-(a)$ 只有一个元素, 那么这个元素一定就是 a 的负焦点事件。参数 $\theta > 0$ 表示相对于相对似然度, 决策者愿意在 $1 - u(x, a)$ (非满意度, 代表一种损失)上赋予的权重。如果设置 $\theta = 1$, 表示决策者认为相对似然度和非满意度同样重要。设置更大的 θ 意味着决策者更担心具有较小的相对似然度但较高的不满意度的事件; 也就表明决策者对于损失持更加谨慎的态度。

得到各个决策的负焦点事件后, 下面让我们考虑如何得到负评价系统的最优决策。为了简便起见, 让我们只考虑 $X_-(a)$ 只有一个元素的情况。

基于负焦点事件的最优决策

设定

$$\max_{a \in A} \min \{ 1 - \pi(x_-(a)), \tau * u(x_-(a), a) \} \quad (4)$$

的最优解集合为 A_* 。这里 τ 是个预先给定的正实数。式(4)的一个最优解 a_* 是 a 的负评价系统的最优决策如果对于任意一个非 a_* 的 A_* 的元素 a , a_* 满足

$$\pi(x_-(a_*)) < \pi(x_-(a)), u(x_-(a_*), a_*) \geq u(x_-(a), a), \text{ 或者}$$

$$\pi(x_-(a_*)) \leq \pi(x_-(a)), u(x_-(a_*), a_*) > u(x_-(a), a)。$$

显而易见, 如果 A_* 只有一个元素, 那么这个元素一定就是负评价系统的最优决策。

从式(4)我们可以知道, 对于任意的两个决策 $a_1, a_2 \in A$, 如果 $\pi(x_-(a_1)) \leq \pi(x_-(a_2))$ 且 $u(x_-(a_1), a_1) \geq u(x_-(a_2), a_2)$, 那么 $\min \{ 1 - \pi(x_-(a_1)), \tau * u(x_-(a_1), a_1) \} \geq \min \{ 1 - \pi(x_-(a_2)), \tau * u(x_-(a_2), a_2) \}$ 。因此, 由式(4)得到的最优决策, 它的负焦点事件和别的决策的负焦点事件相比具有较小的相对似然度和较高的满意度。决策者考虑各个决策的最令人担心的事件(负焦点事件)并从中选出一个以较小似然度来发生, 即使发生也能带来较好的收益的负焦点事件; 这个被选出的负焦点事件代表决策者认为的不好中的好的。因此, a_* 适合悲观的决策者。

参数 $\tau > 0$ 同样表示相对于满意度, 决策者愿意在 $1 - \pi(x_-(a))$ (表示一种不情愿发生)上赋予的权重。如果设置 $\tau = 1$, 表示决策者认为它们同样重要。设置更大的 τ 意味着在大概率发生小损失和小概率发生大损失这两个不好的事件中, 决策者更容易接受后者, 反映了决策者更不情愿接受损失的态度(因为是小概率事件)。

3 基于焦点决策理论的报童模型

为了更好地说明焦点决策理论的分析过程, 本节引入报童问题。在某创新型产品的销售季开始前, 零售商就必须决定该产品的订货量 $q \in Q$ 。产品的市场需求用随机变量 X 表示, 产品的市场零售价为 R , 批发价格为 W , 显然 $R > W$ 。未出售产品的回收价格记为 $S_o > 0$, 显然 $S_o < W$ 。如有缺货发生, 单位机会成本为 $S_u > 0$ 。零售商的利润函数为

$$v(x, q) = \begin{cases} Rx + (q - x)S_o - Wq; & q > x \\ (R - W)q - S_u(x - q); & q \leq x \end{cases} \quad (5)$$

以下将利用焦点决策理论中的积极评价系统来分析该报童问题。为简便起见，我们考虑随机变量 X 是离散随机变量，它的概率分布是 $p(x_i)$ 。根据定义 1 和定义 2，我们可以将相对似然函数和满意度函数分别设为

$$\pi(x_i) = \frac{p(x_i)}{\max_i p(x_i)}, \tag{6}$$

$$u(x_i, q_j) = \frac{v(x_i, q_j) - \min_{x_i, q_j} v(x_i, q_j)}{\max_{x_i, q_j} v(x_i, q_j) - \min_{x_i, q_j} v(x_i, q_j)} \tag{7}$$

数值例

假设市场零售价 $R=10$ ，批发价格 $W=4$ ，单位机会成本 $S_u=3$ ，回收价格 $S_o=0$ ，产品需求的概率分布 $p(x_i)$ 由表 2 给出：

表 2 产品需求的概率
Table 2 Probability of Product Demand

需求	1	2	3	4
概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

首先来看经典报童模型，根据式 (5) 可求得每一个可行的订货量所对应的利润，如表 3 所示。

表 3 每一个订货量所对应的利润
Table 3 Profit for each order quantity

类别		需求量			
		1	2	3	4
订货量	1	6	3	0	-3
	2	2	12	9	6
	3	-2	8	18	15
	4	-6	4	14	24

利用加权平均的方法，可以计算出每一个订货量的期望利润（表 4），从而选取期望利润最大的订货量作为最优订货量，即

表 4 每一个订货量的期望利润
Table 4 Expected profit for each order quantity

类别	订货量			
	1	2	3	4
期望利润	$1\frac{3}{4}$	$9\frac{2}{3}$	$11\frac{1}{12}$	$8\frac{1}{6}$

$$q^* = \operatorname{argmax}_{q \in \{1, 2, 3, 4\}} \sum_{i=1}^4 v(x_i, q) p(x_i) = 3 \tag{8}$$

接下来我们用焦点决策理论来分析此报童问题。我们假设零售商是乐观的决策者，利用式 (1) 和式 (2)（正评价系统）可以得到正评价系统的最优订货量（乐观订货量）和其相对应的正焦点事件（具有相对较高的概率且能带来相对较高的满意度的最受欢迎的产品需求）。

通过式 (6) 和式 (7)，需求的相对似然度和每一个订货量所对应的满意度分别由表 5 和表 6 给出。

表5 需求的相对似然度

Table 5 Relative Likelihood of Demand

需求	1	2	3	4
概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$
相对似然度	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

表6 订货量所对应的满意度

Table 6 Satisfaction Corresponding to Order Quantity

类别		需求量			
		1	2	3	4
订货量	1	2/5	3/10	1/5	1/10
	2	4/15	3/5	1/2	2/5
	3	2/15	7/15	4/5	7/10
	4	0	1/3	2/3	1

根据式 (1), 可分别求得参数 $\varphi=1$, $\varphi=\frac{1}{4}$ 和 $\varphi=6$ 时, 每一个订货量所对应的正焦点事件 (需求量), 如表 7 所示。

表7 各个订货量的正焦点事件 (需求)

Table 7 Positive Focus Events for Each Order Quantity (Demand)

类别	订货量			
	1	2	3	4
正焦点事件 ($\varphi=1$)	2	2	3	3
正焦点事件 ($\varphi=\frac{1}{4}$)	2	2	2	2
正焦点事件 ($\varphi=6$)	1	2	3	4

我们以参数 $\varphi=1$ 为例展开说明, 此时式 (1) 变为 $\max_{x \in X} \min \{ \pi(x), u(x, q) \}$ 。当订货量 $q=1$ 且需求量也为 1 时, 根据表 5 和表 6, 可以得到 $\min \{ \pi(x), u(x, q) \} = \min \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{5} \right\} = \frac{1}{6}$; 同理, 可以求出当订货量 $q=1$ 而需求量为 2, 3, 4 时的 $\min \{ \pi(x), u(x, q) \}$ 值, 分别为 $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{15}$ 和 0。所以 $\max_{x \in S} \min \{ \pi(x), u(x, q) \} = \max \left\{ \frac{1}{6}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, 0 \right\} = \frac{4}{15}$, 也即需求量为 2 时的 $\min \{ \pi(x), u(x, q) \}$ 值。所以, 订货量 $q=1$ 时的正焦点事件是需求量 2。同理可以得到订货量为 2, 3, 4 时的正焦点事件分别是 2, 3, 3。

得到每一个订货量所对应的正焦点事件后, 根据表 6 和表 7, 即可得到每一个订货量的正焦点事件所对应的满意度, 如表 8 所示。

表8 每一个订货量的正焦点事件所对应的满意度

Table 8 Satisfaction for Positive Focus Events for Each Order Quantity

类别	订货量			
	1	2	3	4
正焦点事件 ($\varphi=1$)	3/10	3/5	4/5	2/3
正焦点事件 ($\varphi=\frac{1}{4}$)	3/10	3/5	7/15	1/3
正焦点事件 ($\varphi=6$)	2/5	3/5	4/5	1

设参数 $\kappa=1$, 根据式 (2)、表 5、表 7 和表 8 可以得到当参数 $\varphi=\frac{1}{4}$, 1 和 6 时, 最优订货量分别是 2, 3 和 3。我们以参数 $\varphi=6$ 为例展开说明, 由于 $\kappa=1$, 此时式 (2) 转变为 $\max_{q \in Q} \min \{ \pi(x_+^*(q)), u(x_+^*(q), q) \}$, 当订货量 $q=1$ 时, 根据表 7 可知它所对应的正焦点事件为需求量 1, 根据表 5 和表 8, 可以得到 $\min \{ \pi(x), u(x, q) \} = \min \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{5} \right\} = \frac{1}{6}$; 同理, 可以求出当订货量 $q=2, 3$ 和 4 时的 $\min \{ \pi(x_+^*(q)), u(x_+^*(q), q) \}$ 值, 分别为 $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{6}$ 。所以有 $\max_{q \in Q} \min \{ \pi(x_+^*(q)), u(x_+^*(q), q) \} = \max \left\{ \frac{1}{6}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right\} = \frac{2}{3}$, 也即订货量为 3 时的值。因而, 最优乐观订货量是 3。从这个简单的例子我们可以看出: 经典报童模型用每个订货量的期望利润来评价这一订货量, 从而选出最佳订货量; 而与之相对, 基于焦点决策理论的报童模型则是每个订货量有一个最关注的焦点事件 (需求), 最优订货量取决于对这些焦点事件的选取。

4 结论和展望

根据 Simon^[34] 的定义, 对合理性的建模存在两类理论方法: 一类是实质合理性 (substantive rationality) 理论, 另一类是过程合理性 (procedural rationality) 理论。可以说现有的合理性模型基本属于实质理性理论。这些理论的基本思想是取代或松弛期望效用理论或主观期望效用理论的部分公理。然而, 实证研究表明, 这样的新理论也同时带来了新的悖论。本文介绍的焦点决策理论是过程合理性理论。焦点决策理论的核心观点是, 最显著的事件与最偏好的行为相对应。而寻找最显著事件的过程包括两个步骤: 首先寻找每个行为的显著事件 (焦点事件); 然后从所有行为的焦点事件中选择最显著的事件。

决策问题本身的特点, 环境因素和个体差异是影响个体决策的三个公认因素^[35]。Mohammed 和 Schwall^[36] 指出, 尽管一些现有的理论可以提供一些方式来代表一个人对不确定事件的态度 (如凸函数, 凹函数, 后悔的引入等), 但是规范性和描述性决策理论都未能融合个体差异。相反, 焦点决策理论提供了一个理论框架, 通过假设正评价系统、负评价系统或两者的选择, 以及对焦点事件的选择与决策者的个性密切相关, 从而将个性特征明确地纳入决策。

焦点决策理论为管理经济社会决策问题提供了崭新的公理化的理论基础。基于焦点决策理论的决策模型在数学上是一个双层规划问题, 其中上层用于确定最优方案, 下层用于寻找方案的焦点事件。这些双层问题是基础性的、有趣的和具有挑战性的^[37,38]。焦点决策理论还为处理随机优化问题中的不确定性提供了全新的理论基础, 可以帮助研究者建立基于情景的决策模型^[39,40]。

在管理科学相关的研究中, 利用焦点决策理论, 可以在供应链管理模型中考虑参与者的行为特征而设计定制化契约。此外, 焦点决策理论还可从行为科学的角度为诸多问题的研究提供可能的理论基础, 例如, 报童问题中的异常现象^[41]、牛鞭效应^[42]和信息共享策略等问题等研究。

参考文献:

[1] Knight F H. Risk, Uncertainty and Profit [M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921.
 [2] von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior [M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.
 [3] Savage L J. The Foundations of Statistics [M]. New York: Wiley, 1954.
 [4] Allais M. Le comportement de l' homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l' ecole américaine [J]. Econometrica, 1953, 21 (4): 503-546.
 [5] Ellsberg D. Risk, ambiguity and Savage axioms [J]. The Quarterly Journal of Economics, 1961, 75 (4): 643-669.
 [6] Cerreia-Vioglio S, Dillenberger D, Ortoleva P. Cautious expected utility and the certainty effect [J]. Econometrica, 2015, 83 (2): 693-728.
 [7] Galaabaatar T, Karni E. Subjective expected utility with incomplete preferences [J]. Econometrica, 2013, 81 (1): 255-284.
 [8] Gilboa I. Expected utility with purely subjective nonadditive probabilities [J]. Journal of Mathematical Economics, 1987, 16

(1): 65-88.

- [9] Gul F, Pesendorfer W. Expected uncertain utility theory [J]. *Econometrica*, 2014, 82 (1): 1-39.
- [10] Quiggin J. A theory of anticipated utility [J]. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 1982, 3 (4): 323-343.
- [11] Schmeidler D. Subjective probability and expected utility without additivity [J]. *Econometrica*, 1989, 57 (3): 571-587.
- [12] Strzalecki T. Axiomatic foundations of multiplier preferences [J]. *Econometrica*, 2011, 79 (1): 47-73.
- [13] Etner J, Jeleva M, Tallon J M. Decision theory under ambiguity [J]. *Journal of Economic Surveys*, 2012, 26 (2): 234-270.
- [14] Starmer C. Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk [J]. *Journal of Economic Literature*, 2000, 38 (2): 332-382.
- [15] Glockner A, Herbold A. An eye-tracking study on information processing in risky decisions: Evidence for compensatory strategies based on automatic processes [J]. *Journal of Behavioral Decision Making*, 2011, 24 (1): 71-98.
- [16] Stewart N, Hermens F, Matthews W J. Eye movements in risky choice [J]. *Journal of Behavioral Decision Making*, 2016, 29 (2-3): 116-136.
- [17] Zhou L, Zhang Y Y, Wang Z J, et al. A scanpath analysis of the risky decision-making process [J]. *Journal of Behavioral Decision Making*, 2016, 29 (2-3): 169-182.
- [18] Guo P. One-shot decision theory [J]. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-Part A Systems and Humans*, 2011, 41 (5): 917-926.
- [19] Wang C, Guo P. Behavioral models for first-price sealed-bid auctions with the one-shot decision theory [J]. *European Journal of Operational Research*, 2017, 261 (3): 994-1000.
- [20] Guo P, Ma X. Newsvendor models for innovative products with one-shot decision theory [J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 239 (2): 523-536.
- [21] Ma X. Pricing to the scenario: a price-setting newsvendor model for innovative products [J]. *Mathematics*, 2019, 7: 814.
- [22] Guo P, Li Y. Approaches to multistage one-shot decision making [J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 236 (2): 612-623.
- [23] Li Y, Guo P. Possibilistic individual multi-period consumption - investment models [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2015, 274: 47-61.
- [24] Guo P. One-shot decision approach and its application to duopoly market [J]. *International Journal of Information and Decision Sciences*, 2010, 2 (3): 213-232.
- [25] Guo P, Yan R, Wang J. Duopoly market analysis within one-shot decision framework with asymmetric possibilistic information [J]. *International Journal of Computational Intelligence System*, 2010, 3 (6): 786-796.
- [26] Guo P. Private real estate investment analysis within a one-shot decision framework [J]. *International Real Estate Review*, 2010, 13 (3): 238-260.
- [27] Guo P. One-shot decision theory: A fundamental alternative for decision under uncertainty, "Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences" [A] //Guo P, Pedrycz W. *Studies in Computational Intelligence 502* [C]. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.
- [28] Guo P. Focus theory of choice: modeling procedural rationality and resolving the St. Petersburg, Allais, and Ellsberg paradoxes, preference reversals, the event-splitting effect, and the violations of tail-separability, stochastic dominance and transitivity [EB/OL]. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3073726> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3073726>.
- [29] Guo P. Focus theory of choice and its application to resolving the St. Petersburg, allais, and ellsberg paradoxes and other anomalies [J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 276: 1034-1043.
- [30] Brandstätter E, Korner C. Attention in risky choice [J]. *Acta Psychologica*, 2014, 152: 166-176.
- [31] Busse M R, Lacetera N, Pope D G, et al. Estimating the effect of salience in wholesale and retail car markets [J]. *American Economic Review*, 2013, 103 (3): 575-579.
- [32] Lacetera N, Pope D G, Sydnor J R. Heuristic thinking and limited attention in the car market [J]. *American Economic Review*, 2012, 102 (5): 2206-2236.
- [33] Tversky A, Kahneman D. The framing of decisions and the psychology of choice [J]. *Science*, 1981, 211 (4481): 453-458.
- [34] Simon H A. From substantive to procedural rationality//Latsis S J. *Method and Appraisal in Economics* [M]. New York: Cambridge University Press, 1976.
- [35] Hunt R G, Krzystofiak F J, Meindl J R, et al. Cognitive style and decision making [J]. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 1989, 44: 436-453.

- [36] Mohammed S, Schwall A. Individual differences and decision making: what we know and where we go from here [A] // Hodgkinson G P, Ford J K. International Review of Industrial and Organizational Psychology. West Sussex [C]. England: John Wiley & Sons, 2009: 249-312.
- [37] Zhu X, Guo P. Approaches to four types of bilevel programming problems with nonconvex nonsmooth lower level programs and their applications to newsvendor problems [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2017, 86 (2): 255-275.
- [38] Zhu X, Guo P. Single-level reformulations of a specific non-smooth bilevel programming problem and their applications [J]. Optimization Letters, 2019, <https://doi.org/10.1007/s11590-019-01444-7>.
- [39] Zhu X, Guo P. Bilevel programming approaches to production planning for multiple products with short life cycles [J]. 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research, 2019, <https://link.springer.com/article/10.1007/s10288-019-00407-z>.
- [40] Guo P, Zhu X. Focus programming: a fundamental alternative for stochastic optimization problems. Available at SSRN 3334211.
- [41] Schweitzer M E, Cachon G P. Decision bias in the newsvendor problem with a known demand distribution: Experimental evidence [J]. Management Science, 2000, 46 (3): 404-420.
- [42] Lee H L, Padmanabhan V, Whang S. Information distortion in a supply chain: the bullwhip effect [J]. Management Science, 1997, 43 (4): 546-558.

Introduction to Focus Theory of Choice

Guo Peijun¹, Ma Xiuyan²

1. Faculty of Business Administration, Yokohama National University, Yokohama, Japan;

2. School of Economics and Management, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

Abstract: Focus Theory of Choice was proposed by Guo Peijun in 2019. This theory initially axiomatizes the procedure rationality proposed by Professor Simon, who won the Nobel Prize in economics in 1978. Different from the existing decision theories that are basically substantive rational and follow the weighed-sum framework, focus theory of choice asserts that the decision maker chooses an alternative as an optimal one because this alternative has the most salient event. According to this idea, the decision making procedure is divided into two steps: in the first step, for each alternative, some specific event which is recognized as the most attractive or concerned event is selected as the positive or negative focus of this alternative; in the second step, based on the foci of all alternatives, a decision maker chooses a most-preferred alternative. Focus theory of choice handles decision making with risk or under ambiguity or under ignorance within a unified framework and can resolves well-known anomalies, such as the St. Petersburg, Allais, and Ellsberg paradoxes, and violations of stochastic dominance. This paper will briefly introduce the basic ideas and characteristics of focus theory of choice and show how to determine the optimal alternative based on this theory. A simple numerical example of newsvendor problem is used to illustrate the details.

Key words: Focus Theory of Choice; Procedural Rationality; Newsvendor Model