Prospect theory and stock market anomalies

JF 2021.10

报告人：解一佳

- 1992年Tversky, A. and D. Kahneman在Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty一文中提出累积前景理论。
- 2016年Barberis, N., A. Mukherjee, and B. Wang在Prospect theory and stock returns: An empirical test一文中利用前景理论构建了一个获取超额收益的异象，基于累积前景理论的价值和权重函数，使用股票历史收益率数据为输入，计算了一个 TK 变量（TK 是 Tversky 和 Kahneman 首字母缩写），并用它构建了一个 anomaly。
- 2019年Barberis, N., L. Jin, and B. Wang (2019). Prospect theory and stock market anomalies是从前景理论出发提出了模拟真实世界中投资者投资决策的模型，并指出通过该模型计算的异象收益率和市场中真实异象的收益率相符，从而解释了异象。
- 本文不再将前景理论视为获得超额收益的渠道，而是将前景理论视为市场中其他异象产生的根源。

目录

1、引言

问题：

- 当投资者根据前景理论评估风险时，什么决定了平均回报？（平均回报率将取决于典型小盘股的回报波动性、回报偏斜和资本收益悬置）
- 前景理论对小盘股和大盘股的相对平均回报率是否可以预测？

构建了一个新的资产价格模型（前景理论、狭隘框架）

使用该模型对平均回报的横截面进行定量预测

选取了22个显著的股市异常，并检验我们的模型是否有助于解释它们。

我们发现，该模型能够揭示这些异常的大部分。

2.累积前景理论和狭隘框架

1、累积前景理论

$$(x_{-m}, p_{-m}; \ldots; x_{-1}, p_{-1}; x_0, p_0; x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n),$$

其价值为 $\sum_{i=-m}^{n} \pi_i v(x_i),$

其中π_i是权重函数，$\vartheta(\cdot)$是价值函数

$$\pi_i = \begin{cases} w(p_i + \ldots + p_n) - w(p_{i+1} + \ldots + p_n) \\ w(p_{-m} + \ldots + p_i) - w(p_{-m} + \ldots + p_{i-1}) \end{cases} \text{for} \quad \begin{matrix} 0 \le i \le n \\ -m \le i < 0 \end{matrix}, \tag{4}$$

$$v(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{for} \quad x \ge 0 \\ -\lambda(-x)^\alpha & \quad\quad\; x < 0 \end{cases}$$

λ＞1是损失厌恶系数
α∈ (0,1)表示敏感度递减的快慢
δ ∈ (0,1)表示高估尾部事件的程度

$$w(P) = \frac{P^\delta}{(P^\delta + (1-P)^\delta)^{1/\delta}},$$

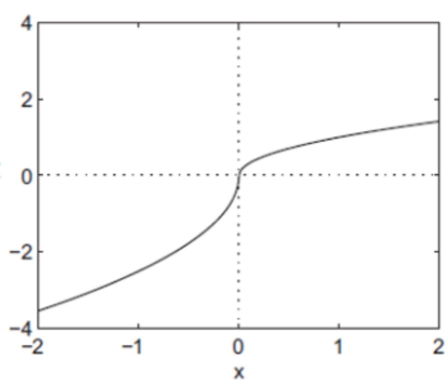
2.累积前景理论和狭隘框架

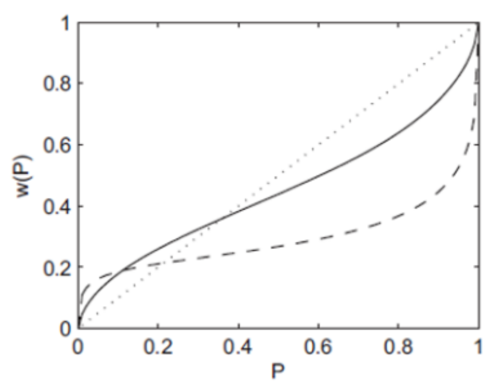
价值函数特点

- 1. 结果 x —— 即得与失，是相对一个给定的参考点而言的，而主观价值 v(x) 是 x 的非线性函数。
- 2. 价值函数的第二个特点是它反映了人们损失厌恶。价值函数 v(.) 在 x=0 左、右两侧并不对称，亏损部分的负增长快于收益部分的正增长：v(x) < -v(-x)。
- 3. 无论是获利还是亏损，价值函数均呈现出敏感度递减。这意味着，当结果为获利时，价值函数为凹函数；当结果为亏损时，价值函数为凸函数。

权重函数特点：人们会高估尾部事件发生的概率

λ=2.5
α=0.5





$\delta = 0.4$
$\delta = 0.65$
$\delta = 1$

2.累积前景理论和狭隘框架

2、狭隘框架

狭隘框架：指的是即人们更倾向于把多个决策独立看待，而非放在一个篮子里综合考虑。比如购买股票的时候把不同股票的盈亏独立看待，而非从一个投资组合整体的角度来评判。

3.模型与均衡状态

1、模型

本文所建立的模型是一个 3 期模型（时刻 －1，0，1）。模型关心投资者在时刻 0 如何将财富分配在 N 支股票（以及无风险资产）中，从而最大化时刻 1 的效用。

符号	说明
R_f	无风险资产的单期**总回报**（总回报是含本金的回报，因此如果在时刻 0 投资 1 块钱到无风险资产，则时刻 1 的回报为 R_f，它是一个大于 1 的数）
$\tilde{R}_i$	股票 i 的单期总回报，其均值为 $\bar{R}_i$，不同股票总回报之间的协方差矩阵为 $\Sigma=\{\sigma_{ij}\}$；令 $\tilde{R}=[\tilde{R}_1,\cdots,\tilde{R}_N]'$
Θ_i	决策变量，投资者在时刻 0 分配到股票 i 上的财富比例；令 $\Theta=[\Theta_1,\cdots,\Theta_N]'$
W_0	投资者在时刻 0 的财富
$\tilde{W}_1$	投资者在时刻 1 的财富（随机变量）
$\tilde{G}_i$	股票 i 在时刻 1 的盈亏（随机变量）

3. 模型与均衡状态

1、模型

投资者在时刻1的财富为 $\tilde{W}_1 = W_0((1-\mathbf{1}'\Theta)R_f + \Theta'\tilde{R})$

假设投资者试图选择最优的财富分配 Θ = [Θ_1, …, Θ_N]’，以最大化如下的目标函数

$$\max_{\Theta_1,\cdots,\Theta_N} \mathrm{E}[\tilde{W}_1] - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(\tilde{W}_1) + b_0 \sum_{i=1}^{N} V(\tilde{G}_i)$$

$$= \max_{\Theta_1,\cdots,\Theta_N} W_0((1-\mathbf{1}'\Theta)R_f + \Theta'\bar{R}) - \frac{\gamma}{2}W_0^2\Theta'\Sigma\Theta + b_0 \sum_{i=1}^{N} V(\tilde{G}_i)$$

股票i在时刻1的盈亏为 $\tilde{G}_i = W_0\Theta_i(\tilde{R}_i - R_f) + W_{-1}\Theta_{i,-1}g_i$

g_i是股票 i 在 –1 到 0 之间的盈亏

我们通过下式计算前景理论效用，即V(G_i)

$$-\lambda W_0^{\alpha}\int_{-\infty}^{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}(\Theta_i(R_f-R_i)-\Theta_{i,-1}g_i)^{\alpha}dw(P(R_i))$$

$$-W_0^{\alpha}\int_{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}^{\infty}(\Theta_i(R_i-R_f)+\Theta_{i,-1}g_i)^{\alpha}dw(1-P(R_i)),$$

3. 模型与均衡状态

1、模型

在计算目标函数时，还要知道股票收益的联合分布。考虑到股票收益率尖峰肥尾以及偏度特征，该文并没有使用传统的正态分布，而是使用了广义双曲线分布，即GH分布

$$p(R) = \frac{2^{1-\frac{\nu+N}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{\frac{N}{2}}|S|^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{K_{\frac{\nu+N}{2}}(\sqrt{(\nu+(R-\mu)'S^{-1}(R-\mu))\zeta'S^{-1}\zeta})\exp((R-\mu)'S^{-1}\zeta)}{\left(\sqrt{(\nu+(R-\mu)'S^{-1}(R-\mu))\zeta'S^{-1}\zeta}\right)^{-\frac{\nu+N}{2}}(1+(R-\mu)'S^{-1}(R-\mu)/\nu)^{\frac{\nu+N}{2}}}, \text{ for } \zeta \neq 0 \quad (12)$$

$$p(R) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{\frac{N}{2}}|S|^{\frac{1}{2}}} \cdot (1+(R-\mu)'S^{-1}(R-\mu)/\nu)^{-\frac{\nu+N}{2}}, \text{ for } \zeta = 0, \quad (13)$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function and K_l is the modified Bessel function of the second kind with order l.[7]

S=$\{S_{ij}\}$ –离散矩阵，控制收益的离散度

ζ=(ζ1,⋯，ζn)-是不对称参数的向量，控制收益的偏度

ϑ –自由度标量，控制分布尾部重量（尾肥）

3. 模型与均衡状态

1、模型

对于上述分布有$E(R)=\mu+\frac{\vartheta}{\vartheta-2}\zeta$

- μ 的取值并非通过实际数据估计而来，μ 的取值应使得模型最优解 Θi 满足市场出清
- 由此我们在其他参数给定下，将Θ看作是关于μ的函数Θ（μ）
- 求Θ必须与实际市场联系，市场中每支股票的交易价格已经反映了当前的供需平衡，实现了市场出清，因此每支股票的市值权重就是均衡状态下的最优权重。
- 均衡状态下股票i的权重等于它的市值除以市场中所有 资产 的市值之和。令 $\Theta_{M,i}$代表该权重，下标M表示这是来自实际市场的权重。
- 确定 μ 的逻辑就是搜索其取值，使模型的最优解 Θi 和 $\Theta_{M,i}$满足它们应该满足的关系。（μ把模型与实际市场联系起来）

3. 模型与均衡状态

2、均衡状态

- 在这一节我们将回答上一节中Θ_i与$\Theta_{M,i}$的关系
- 提出了一种“有限理性下非一致持仓”的均衡结构假设，它极大的化简了目标函数求解，且让Θ_i与$\Theta_{M,i}$满足了市场出清条件下的关系。
- Θ_i与$\Theta_{M,i}$的关系

(1)投资者在决定股票 i 的最优权重 Θ_i 时，会假设其他股票的权重满足 $\Theta_j=\Theta_{M,j}$，$j \neq i$。利用这个假设就可以把原始目标函数（同时考虑所有 Θ_i，$i=1,\cdots,N$）转化为独立考虑每个Θ_i的目标函数。

(2)Θ_i与$\Theta_{M,i}$的关系满足以下两个条件之一

①目标函数有唯一全局最优解，$\Theta_i=\Theta_{M,i}$；

②目标函数有两个全局最优解 Θ_i^* 和 Θ_i^{**}，它们满足 $\Theta_i^* < \Theta_{M,i} < \Theta_i^{**}$

3. 模型与均衡状态

2、均衡状态

研究发现：

- 在模型和均衡结构的假设下，对于大部分股票来说，模型的最优解满足 $\Theta_i=\Theta_{M,i}$；对于极少部分股票，模型最优解满足 $\Theta_i^* < \Theta_{M,i} < \Theta_i^{**}$
- Θ_i^*的取值很接近 $\Theta_{M,i}$，只比它小一点，而 Θ_i^{**}则要大得多。这说明，为了满足市场出清，大多数投资者将会持有 Θ_i^*，而只有很少的投资者会重仓以 Θ_i^{**}的权重持有股票 i。

此时目标函数可化为

$$\Theta_i(\mu_i + \frac{\nu\zeta_i}{\nu-2} - R_f) - \frac{\widehat{\gamma}}{2}(\Theta_i^2\sigma_i^2 + 2\Theta_i\sum_{j\neq i}\Theta_{M,j}\sigma_{ij})$$
$$-\lambda\widehat{b}_0\int_{-\infty}^{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}(\Theta_i(R_f-R_i)-\Theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(P(R_i))$$
$$-\widehat{b}_0\int_{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}^{\infty}(\Theta_i(R_i-R_f)+\Theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(1-P(R_i)),$$

3. 模型与均衡状态

2、均衡状态

此时满足上述条件的目标函数可由

$$\max_{\Theta_1,\cdots,\Theta_N} \mathrm{E}[\tilde{W}_1] - \frac{\gamma}{2}\mathrm{var}(\tilde{W}_1) + b_0 \sum_{i=1}^{N} V(\tilde{G}_i)$$

$$= \max_{\Theta_1,\cdots,\Theta_N} W_0((1-\mathbf{1}'\Theta)R_f + \Theta'\bar{R}) - \frac{\gamma}{2}W_0^2\Theta'\Sigma\Theta + b_0\sum_{i=1}^{N} V(\tilde{G}_i)$$

化为

$$\begin{aligned}
&\Theta_i(\mu_i + \frac{\nu\zeta_i}{\nu-2} - R_f) - \frac{\widehat{\gamma}}{2}(\Theta_i^2\sigma_i^2 + 2\Theta_i\sum_{j\neq i}\Theta_{M,j}\sigma_{ij}) \\
&-\lambda\widehat{b}_0\int_{-\infty}^{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}(\Theta_i(R_f-R_i)-\Theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(P(R_i)) \\
&-\widehat{b}_0\int_{R_f-\Theta_{i,-1}g_i/\Theta_i}^{\infty}(\Theta_i(R_i-R_f)+\Theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(1-P(R_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma} &= \gamma W_0 \\
\widehat{b}_0 &= b_0 W_0^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

为了函数更容易实现，我们对函数进行一系列缩放化简并引入资产的β

$$\Theta_{M,R} = \textstyle\sum_{i=1}^{N}\Theta_{M,i}$$

$$\begin{aligned}
\theta_i &= \Theta_i/\Theta_{M,R} \\
\theta_{M,i} &= \Theta_{M,i}/\Theta_{M,R} \\
\theta_{i,-1} &= \Theta_{i,-1}/\Theta_{M,R}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta_i(\mu_i + \frac{\nu\zeta_i}{\nu-2} - R_f) - \frac{\widehat{\gamma}}{2}(\theta_i^2\sigma_i^2 + 2\theta_i(\beta_i\sigma_M^2 - \theta_{M,i}\sigma_i^2)) \\
&-\lambda\widehat{b}_0\int_{-\infty}^{R_f-\theta_{i,-1}g_i/\theta_i}(\theta_i(R_f-R_i)-\theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(P(R_i)) \\
&-\widehat{b}_0\int_{R_f-\theta_{i,-1}g_i/\theta_i}^{\infty}(\theta_i(R_i-R_f)+\theta_{i,-1}g_i)^\alpha dw(1-P(R_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma} &= \gamma W_0\Theta_{M,R} \\
\widehat{b}_0 &= b_0 W_0^{\alpha-1}\Theta_M^{\alpha-}
\end{aligned}$$

4、确定参数

- 因此对于任意待研究的异象（比如动量或者特质性波动率），首先使用异象变量将真实世界中的股票分成十组，然后在每组中，统计这些股票的平均收益分布。

数据来源：从1963年7月到2014年12月，我们每个月都会对纽约证券交易所、美国证券交易所或纳斯达克上市的所有股票的相关异象进行排名，然后将它们分十组。

- 同时，将模型世界中的 1000 支股票也分成十组（每组 100 支），**然后将模型中的十组和真实世界中的根据异象变量取值高低分成的十组两两对应。**
- 模型世界中每组内的100只股票各参数相同
- 需要计算 σ_i, ζ_i, g_i, 和 β_i，即股票的收益波动性、收益偏斜、收益悬置和贝塔系数。
- 其他参数来自行为金融学文献。

5、解释异象

- 文章中考虑了美股市场中最重要的 22 个异象（下表）

Anomaly	Abbreviation
Idiosyncratic volatility	IVOL
Market capitalization	SIZE
Value	VAL
Expected idiosyncratic skewness	EISKEW
Momentum	MOM
Failure probability	FPROB
O-Score	OSC
Net stock issuance	NSI
Composite equity issuance	CEI
Accrual	ACC
Net operating assets	NOA
Gross profitability	PROF
Asset growth	AG
Return on equity	ROE
Investment	INV
Maximum daily return	MAX
Organizational capital	ORGCAP
Long-term reversal	LTREV
External finance	XFIN
Short-term reversal	STREV
Difference of opinion	DOP
Post-earnings announcement drift	PEAD

5、解释异象

- 为了检验前景理论能否解释上述异象，只需考虑异象的第 1 组和第 10 组（多、空两头）的实际预期收益率和模型给出的预期收益率是否一致。
- 只有下面两个条件同时满足，才说前景理论模型能够解释某个异象

① **多、空两头谁高谁低应该一致，即模型预测的异象应该和实际观察到的异象收益率符号相同。（否则和实际相反不能解释异象）**

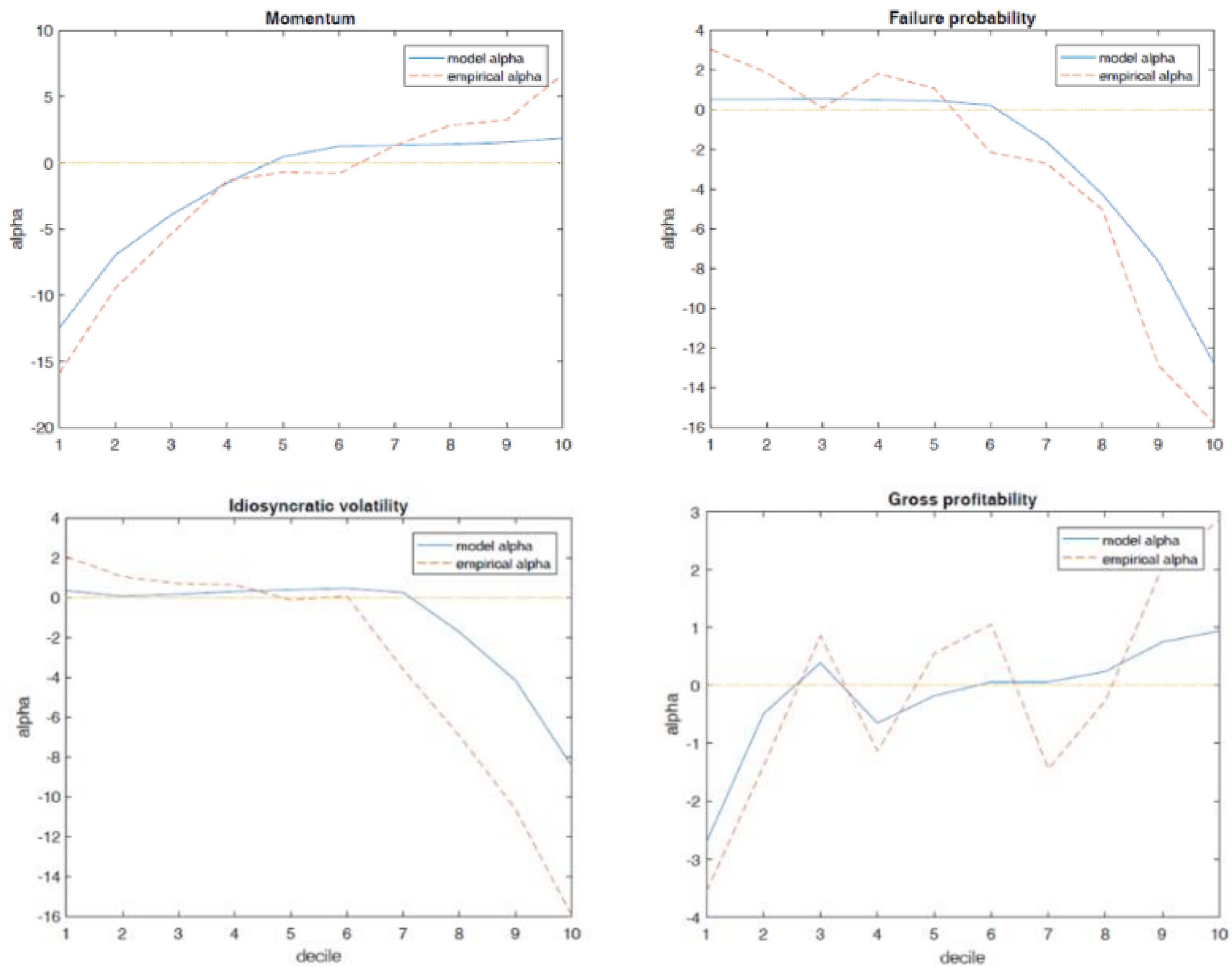
② **模型给出的多、空两头的预期收益率差异应该足够大（否则无关）**

- 依照上述定义，前景理论模型对这 22 个异象的解释能力如下表所示

模型能解释异象（13 个）	MOM，failure probability，IVOL，gross profitability，idiosyncratic skewness，ROE，MAX，O-Score，external finance，CEI、NSI，PEAD、DOP
模型和实际相反（7 个）	size，value，long-term reversal，short-term reversal，accrual，asset growth、investment
模型与异象无关（2 个）	net operating assets、organizational capital

5、解释异象

- 除此之外，对于很多异象，该模型不仅能够解释异象的收益率（即多空两头预期收益率的差异），更能解释十个投资组合预期收益率的单调性，比如下面这些。



结语

- 我们提出了一个新的资产价格模型
- 并检验其解释22个突出的股市异常的能力。
- 该模型综合了前景理论的所有要素，考虑了投资者之前的收益和损失，并基于对贝塔系数、波动性、偏度和资本收益悬置的经验估计，对资产的平均回报进行了定量预测。
- 我们发现，该模型有助于思考我们考虑的大多数异常。它在动量、波动性、困境和盈利异常方面表现尤其出色，但在价值异常方面表现不佳。

谢谢！