

Empirical evaluation of overspecified asset pricing models

Elena Manresa, Francisco Peñaranda, Enrique Sentana



Authors

- **Manresa, Elena** **New York University**
- **Peñaranda, Francisco** **Queens College, City University of New York**
- **Sentana, Enrique** **Universidad Internacional Menéndez Pelayo, Centro de Estudios Monetarios y Financieros**



Contents

- 1. Introduction
- 2. Overspecified asset pricing models
- 3. Econometric methodology
- 4. Comparison to the existing literature
- 5. Empirical applications
- 6. Conclusions and directions for further research



ABSTRACT

- 带有可能不必要的风险因素的实证资产定价模型越来越普遍，但是它们可能产生有误导性的统计结论。
- 与以前的研究不同，我们估计了与资产定价模型相匹配的SDF的值和风险价格。我们还使用与测试资产无关，并且没有经济意义的SDF来检测模型是否过度识别。
- 我们估计的与CAPM兼容的SDF的解通常是二维的。此外，我们经常发现在这些线性空间中的所有sdf都与测试资产的收益不相关。



1. Introduction

- 研究问题：最流行的以实证为导向的资产定价模型有效地假设存在一个共同的随机贴现因子(SDF)，该因子在某些风险因素中是线性的。起初，这些模型在实证上解释CAPM异常方面取得了有限的成果，但研究人员渐渐的考虑了越来越多的因素。一些作者认为其中一些因素或它们的线性组合可能与资产收益不相关，这可能会导致模型在经济上无意义。
- 研究目的：研究风险价格的估计和检验过度识别的线性因子定价模型。

过度识别的模型：模型中至少有一个SDF与超额收益无关的模型。



2. Overspecified asset pricing models

- 2.1 Stochastic discount factors and moment conditions

The pricing error: $E(mr) = 0$

m — Stochastic discount factors, 实证中将 m 看做有 k 个可以观测的风险因子 f 的映射;
 r — $n \times 1$ vector of excess returns, 假设 $E(r) \neq 0$

假设某一资产的价格为 $E(mx) = p$, 无风险资产价格为 $E(mx_f) = p_f$, 其中 x 表示某一资产的回报, p 表示某一资产的价格, x/p 表示该资产的回报率

$$\begin{cases} E(mx) = p \\ E(mx_f) = p_f \end{cases} \quad \begin{cases} E\left(m \frac{x}{p}\right) = 1 \\ E\left(m \frac{x_f}{p_f}\right) = 1 \end{cases} \quad E\left[m \left(\frac{x}{p} - \frac{x_f}{p_f}\right)\right] = 0 \quad \text{即} \quad E(mr) = 0$$



2.1 Stochastic discount factors and moment conditions

The pricing error: $E(mr) = 0$

现实中，研究者通常把SDF转换为可以观测到的风险因子 f ，因此定价方程转化为： $E[(a + b'f)r] = 0$ (1)其中 $m = a + b'f$

若 $E(m) = c$ ，则 $E(m) = E(a + b'f) = c$

$$E(a + b'f - c) = 0 \quad (2)$$

对于一个给定的 (a,b) ，我们可以确定一个相应的 c



2.2 A taxonomy of overspecification

CCAPM:

假设一个实证研究考虑下列三个因子:

$$m = a + b_p f_p + b_c f_c + b_l f_l \quad (3)$$

f_p --市场投资组合; f_c 、 f_l --实证因素, 如消费增长率和人均劳动收入

μ_p, μ_c, μ_l ——实证因子的总平均值

$(\sigma_p, \sigma_c, \sigma_l)$ ——超额收益和 (f_p, f_c, f_l) 的协方差矩阵



2.2 A taxonomy of overspecification

假设风险溢价: $E(r) = \sigma_p \tau_p$ (4) τ_p —风险的市场价格

The CAPM SDF: $m_p = a_p - a_p(1 + \tau_p \mu_p)^{-1} \tau_p \cdot f_p - 0 \cdot f_c - 0 \cdot f_l$ (5)

注: (5)式中的 b_p 、 b_c 、 b_l 的值是通过附录中的两因子的CCAPM模型推出的

$$\begin{cases} m = a + b_p f_p + b_c f_c \\ E(r) = \sigma_p \tau_p \\ E(mr) = \sigma_p [\tau_p (a + \mu_p b_p + \mu_c b_c) + b_p] + \sigma_c b_c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_p = a_p (1 + \tau_p \mu_p)^{-1} \tau_p \\ b_c = 0 \end{cases}$$

由两因子的CCAPM模型推出, 当 $b_p = a_p(1 + \tau_p \mu_p)^{-1} \tau_p$, $b_c = b_l = 0$ 时, 不管 σ_c 、 σ_l 是多少, (3)式的定价误差 $E(mr)$ 都是0



2.2 A taxonomy of overspecification

ICAPM:

当风险溢价由 $E(r) = \sigma_p \tau_p$ 决定时，模型 $m = a + b_p f_p + b_c f_c + b_l f_l$ 既不会产生错误定价，也不会产生完全过度识别



风险溢价 $E(r) = \sigma_p \tau_p + \sigma_s \tau_s$ (6)
 τ_s -- 第二个风险因素 f_s 的风险价格,
 σ_s -- f_s 与超额收益向量 r 的协方差

模型 $m = a + b_p f_p + b_c f_c + b_l f_l$ (3)的定价误差变为:

$$\sigma_p [\tau_p (a + \mu_p b_p + \mu_c b_c + \mu_l b_l) + b_p] + \sigma_s \tau_s (a + \mu_p b_p + \mu_c b_c + \mu_l b_l) + \sigma_c b_c + \sigma_l b_l \quad (7)$$



2.2 A taxonomy of overspecification

- 假设 $\text{rank}(\sigma_p, \sigma_s, \sigma_c, \sigma_l) = 3$, $(\gamma_p, \gamma_s, \gamma_c, \gamma_l)$ 是对矩阵进行归一化
- 当且仅当存在一个 $\sigma_p, \sigma_s, \sigma_c, \sigma_l$ 等于0的线性组合 $\gamma_p\sigma_p + \gamma_s\sigma_s + \gamma_c\sigma_c + \gamma_l\sigma_l = 0$ (8)时, 价格误差(7)为0,

$$\text{即} \begin{cases} b_c = \gamma_c, b_l = \gamma_l \\ \tau_p c + b_p = \gamma_p \quad (9) \\ \tau_s c = \gamma_s \quad (10) \\ c = a + \mu_p b_p + \mu_c b_c + \mu_l b_l \quad (11) \end{cases}$$

- (11)与 $m = a + b_p f_p + b_c f_c + b_l f_l$ (3)中的SDF的均值一致, 因此当且仅当 $c = E(m) = 0$ 时, 模型将被完全过度识别。



3. Econometric methodology

- 3.1 Set estimation

The pricing equation: $E[(a + b'f)r] = 0$ 的矩阵形式为:

$$[E(r) \ E(rf')] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M\theta = 0 \quad (12)$$

其中 M 是一个 $n \times (k+1)$ 的矩阵, $r(M) \leq k + 1$ (假设 $k < n$)

θ 是一个 $(k+1) \times 1$ 的向量



3.1 Set estimation

- 根据Arellano et al.(2012), 先指定定价条件(12)的解的子空间的维数为d, 因此 $r(M) = (k + 1) - d$ 。维持 $E(r) \neq 0$ 的假设, $1 \leq r(M) \leq k$
- 我们通过复制d次矩条件(12)来有效地估计该子空间的解, 并且对 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ 施加限制条件和进行标准化处理, 确保解的识别。

$$\begin{cases} [E(r) & E(rf')] \theta_1 = 0 \\ [E(r) & E(rf')] \theta_2 = 0 \\ \dots \\ [E(r) & E(rf')] \theta_d = 0 \end{cases} \quad (13)$$



3.1 Set estimation

- 用Sargan(1958)和Hansen(1982)的J检验来检验模型是否识别不足

基本原理:如果统计结果没有拒绝,那么原始资产定价模型就没有被很好地识别;如果统计结果拒绝,证明原始模型中的风险价格被正确识别。

- 我们还可以增加矩条件来估计 (c_1, c_2, \dots, c_d) , c_i 为 m 的期望值,给定了 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ 的值,便可确定 c_i 的值。

$$\begin{cases} [1 & E(f')] \theta_1 - c_1 = 0 \\ [1 & E(f')] \theta_2 - c_2 = 0 \\ \dots \\ [1 & E(f')] \theta_d - c_d = 0 \end{cases} \quad (14)$$



3.2 Testing restrictions on admissible SDF sets

- 一个重要的零假设：所有可行的SDF解都有零均值，即 $c_i = 0, i = 1, 2, \dots, d$ ，这种情况称之为“完全过度识别”。

因为 $E(rm) = E(r)E(m) + Cov(r, m)$ ，当 $c = E(m) = 0$ 时，定价误差 $E(rm) = 0$ ，说明 $Cov(r, m) = 0$ ，即 r 和 m 不相关，与文中对于过度识别的模型的定义相符。

用DM (distance metric) 检验来判断模型是否完全过度识别（原理：值越小说明模型越可能完全过度识别）

- 另一个零假设：某些特定的定价因素是否不会出现在任何可接受的SDF中，即与这个因子对应的 b 在向量 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ 中是否为0。



4. Comparison to the existing literature

- 4.1 Equivalent approaches

两种等效的方法：(1)、用 $Cov(r, f)$ 代替 $E(rf')$ 来解释风险溢价；(2)、 r 对常数和 f 的回归

- 4.2 Rank tests

我们的计量经济学方法的优势：它允许我们估计可接受SDF的值，然后可以用来测试是否所有SDF都与测试资产不相关。

- 4.3 Identified sets

我们可以直接估计与收益兼容的可接受SDF集，并测试它们的一些性质，同时用J检验判断定价条件解的维数。此外，我们的方法更容易应用于多个定价因素。



5. Empirical applications

- 5.1 A reassessment of Yogo (2006)
- Yogo的理论模型通过假设非耐用品和耐用品消费组合的递归偏好扩展CCAPM
- the empirical SDF as: $m = a(1 - \delta_p f_p - \delta_c f_c - \delta_d f_d)$ (18)
- f_c , f_d --美国非耐用品(和服务)和耐用品实际人均消费的对数增长率;
 f_p --财富回报(用实际价值加权的美国股票市场的对数回报所衡量)



5.1 A reassessment of Yogo (2006)

- 我们首先用Fama-French的1951年到2001年的季度超额回报的数据评估了这个模型，数据中的风险溢价与Yogo的模型的风险溢价保持一致，模型得到验证。
- 然而，Burnside(2016)和Gospodinov等人(2019)的理论结果表明，模型中含有不相关的因素也可能使得模型拟合效果好。
- 出于这个原因，我们将我们的方法应用于相同的数据。应用条件(13)，当 $d=1,2,3$ 时，分别对有效SDF的一维、二维和三维线性子集进行检验。



5.1 A reassessment of Yogo (2006)

Table 1
Empirical evaluation of Yogo model 1951–2001, CU-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | |
|-------------------|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|
| Market | 0.200 | (0.805) | -3.888 | 0.514 | (0.002) | 4.793 | 0 | 0 |
| Nondur. | 24.765 | (0.458) | 222.902 | 0 | (0.000) | 0 | 115.687 | 0 |
| Durables | 92.229 | (0.035) | 0 | 99.333 | (0.000) | 0 | 0 | 121.320 |
| Mean | 0.014 | (0.790) | -0.099 | 0.034 | (0.494) | 0.852 | 0.421 | -0.029 |
| Criterion | 20.743 | (0.537) | | 56.687 | (0.134) | | 215.144 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 20.814 | (0.592) | | 58.098 | (0.151) | | | |

- 表1是使用CU-GMM方法对模型的过度识别分析的结果。d=1的过度识别检验的p值为53.7%，接受零假设，说明模型没有很好的识别到因子；d = 2的过度识别检验的p值为13.4%，表明模型只识别到了两个因子，可能识别不足；d = 3的过识别检验被强烈拒绝，表明模型精确的识别到了三个因子。
- 当d = 2时，SDF均值为零的假设的DM检验的p值为49.4%，接受原假设，表明模型完全过度识别，即这两种消费指标与超额收益向量的相关性低。



5.1 A reassessment of Yogo (2006)

- 如果我们使用两步或迭代GMM，我们可以得到类似的结论，结果如表2

Table 2

Empirical evaluation of Yogo model 1951–2001, 2S and IT-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | |
|-------------------|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|
| 2S-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.053 | (0.230) | 0.059 | 0.062 | (0.276) | 0.888 | 0.366 | 0.117 |
| Criterion | 19.206 | (0.633) | | 56.145 | (0.145) | | 200.565 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 20.647 | (0.603) | | 58.721 | (0.138) | | | |
| IT-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.055 | (0.206) | 0.088 | 0.060 | (0.180) | 0.573 | 0.190 | -0.024 |
| Criterion | 20.036 | (0.581) | | 59.932 | (0.081) | | 136.623 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 21.634 | (0.542) | | 63.358 | (0.068) | | | |



5.2 Robustness exercises

我们的方法的一个潜在问题是：相对于样本大小而言所使用的矩条件的数量可能太大。所以，我们以两种不同的方式评估表1结果的可靠性：(1) 使用具有较长时间跨度的样本；(2) 使用较小但更复杂的数据。

- (1) 使用1949-2012年的数据，发现表1的结论仍然成立，证实了模型是完全过度识别

Table 3
Empirical evaluation of Yogo model 1949–2012, CU-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | | |
|---|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|--|
| Panel A. 25 size and book-to-market sorted portfolios | | | | | | | | | |
| Market | 0.766 | (0.673) | -1.878 | 0.882 | (0.000) | 12.882 | 0 | 0 | |
| Nondur. | -6.452 | (0.834) | 192.583 | 0 | (0.000) | 0 | 169.191 | 0 | |
| Durables | 106.144 | (0.024) | 0 | 97.810 | (0.000) | 0 | 0 | 110.143 | |
| Mean | 0.003 | (0.972) | 0.052 | 0.008 | (0.757) | 0.411 | 0.065 | -0.075 | |
| Criterion | 18.278 | (0.689) | | 54.818 | (0.175) | | 165.053 | (0.000) | |
| Criterion $c = 0$ | 18.279 | (0.742) | | 55.375 | (0.216) | | | | |



5.2 Robustness exercises

- (2) 在原始数据库中增加五个行业投资组合构成新的数据库，结果显示过度识别和识别不足的问题仍然普遍存在。

Panel B. 6 size and book-to-market sorted portfolios, and 5 industry portfolios

| | | | | | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|--------|---------|-------|---------|---------|
| Market | -4.864 | (0.089) | -1.165 | 1.422 | (0.002) | 7.743 | 0 | 0 |
| Nondur. | 415.901 | (0.001) | 194.803 | 0 | (0.000) | 0 | 184.681 | 0 |
| Durables | -89.991 | (0.400) | 0 | 84.501 | (0.000) | 0 | 0 | 119.130 |
| Mean | 0.053 | (0.800) | 0.079 | 0.093 | (0.142) | 0.640 | 0.090 | -0.087 |
| Criterion | 5.941 | (0.654) | | 22.165 | (0.225) | | 85.715 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 6.005 | (0.739) | | 26.066 | (0.164) | | | |



5.2 Robustness exercises

- 当使用两步GMM或迭代GMM的方法时，仍然得到了相似的结论

Table 4

Empirical evaluation of Yogo model 1949–2012, 2S and IT-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | |
|---|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|
| Panel A. 25 size and book-to-market sorted portfolios | | | | | | | | |
| 2S-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.078 | (0.082) | 0.129 | 0.097 | (0.020) | 0.888 | 0.254 | 0.104 |
| Criterion | 17.252 | (0.749) | | 46.124 | (0.467) | | 243.707 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 20.276 | (0.625) | | 53.924 | (0.258) | | | |
| IT-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.081 | (0.064) | 0.138 | 0.106 | (0.008) | 0.623 | 0.205 | 0.037 |
| Criterion | 17.749 | (0.721) | | 49.294 | (0.343) | | 111.851 | (0.002) |
| Criterion $c = 0$ | 21.182 | (0.570) | | 59.025 | (0.132) | | | |
| Panel B. 6 size and book-to-market sorted portfolios, and 5 industry portfolios | | | | | | | | |
| 2S-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.095 | (0.078) | 0.101 | 0.101 | (0.078) | 0.880 | 0.185 | 0.016 |
| Criterion | 9.957 | (0.268) | | 20.606 | (0.300) | | 108.241 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 13.056 | (0.160) | | 25.696 | (0.176) | | | |
| IT-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.096 | (0.054) | 0.105 | 0.098 | (0.066) | 0.686 | 0.169 | 0.026 |
| Criterion | 10.510 | (0.231) | | 21.206 | (0.269) | | 54.322 | (0.004) |
| Criterion $c = 0$ | 14.220 | (0.115) | | 26.628 | (0.146) | | | |



5.3 A reassessment of Jagannathan and Wang (1996)

- Jagannathan and Wang (1996)通过在市场投资组合中加入人力资本回报的代理来捕获财富投资组合，并通过添加默认价差作为第三个因素来发挥条件信息的作用。

the SDF is: $m = a(1 - \delta_p f_p - \delta_l f_l - \delta_s f_s)$ (19)

f_p -- Ken French网站上价值加权股票市场指数的超额回报;

f_l --人均劳动收入的增长率(个人收入和股息支付之间的差值除以总人口);

f_s --滞后违约溢价(用Baa级和Aaa级公司债券的收益率差来衡量)。



5.3 A reassessment of Jagannathan and Wang (1996)

Table 5

Empirical evaluation of Jagannathan–Wang model 1959–2012, CU-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | |
|---|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|
| Panel A. 25 size and book-to-market sorted portfolios | | | | | | | | |
| Market | -0.012 | (0.995) | 1.130 | -0.745 | (0.119) | 4.340 | 0 | 0 |
| Labor | 146.74 | (0.020) | 268.127 | 0 | (0.000) | 0 | 433.208 | 0 |
| Premium | 45.261 | (0.587) | 0 | 99.848 | (0.000) | 0 | 0 | 75.418 |
| Mean | -0.114 | (0.093) | -0.217 | 0.033 | (0.116) | 0.965 | -1.073 | 0.274 |
| Criterion | 22.964 | (0.404) | | 53.847 | (0.199) | | 188.792 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 25.778 | (0.311) | | 58.157 | (0.150) | | | |
| Panel B. 6 size and book-to-market sorted portfolios, and 5 industry portfolios | | | | | | | | |
| Market | -0.253 | (0.544) | 1.442 | -0.736 | | 4.845 | 0 | 0 |
| Labor | 58.613 | (0.066) | 259.386 | 0 | | 0 | 347.978 | 0 |
| Premium | 72.463 | (0.001) | 0 | 93.845 | | 0 | 0 | 76.529 |
| Mean | 0.002 | (0.968) | -0.203 | 0.079 | | 0.958 | -0.623 | 0.244 |
| Criterion | 12.570 | (0.128) | | 41.588 | (0.001) | | 121.842 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 12.572 | (0.183) | | 44.857 | (0.001) | | | |

- 表5的PanelA用Fama-French的投资组合的月超额回报数据评估该模型。在 $d = 2$ 的情况下，过度识别检验的P值为0.199，说明模型识别不足。
- 表5的PanelB将月超额回报数据与其5个行业投资组合相结合，测试结果被拒绝，说明模型存在识别不足的情况。



5.3 A reassessment of Jagannathan and Wang (1996)

当我们使用两步或迭代GMM也得到了类似的经验结论，如表6所示。

Table 6
Empirical evaluation of Jagannathan–Wang model 1959–2012, 2S and IT-GMM.

| | One-dimensional set | | Two-dimensional set | | | Three-dimensional set | | |
|---|---------------------|---------|---------------------|--------|---------|-----------------------|---------|---------|
| Panel A. 25 size and book-to-market sorted portfolios | | | | | | | | |
| 2S-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.012 | (0.757) | 0.013 | 0.079 | (0.080) | 0.982 | -0.113 | 0.100 |
| Criterion | 29.676 | (0.127) | | 58.993 | (0.095) | | 204.930 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 29.772 | (0.156) | | 64.038 | (0.061) | | | |
| IT-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.012 | (0.749) | 0.014 | 0.075 | (0.120) | 0.882 | -0.033 | 0.123 |
| Criterion | 28.230 | (0.168) | | 55.494 | (0.159) | | 111.663 | (0.002) |
| Criterion $c = 0$ | 28.332 | (0.203) | | 59.743 | (0.119) | | | |
| Panel B. 6 size and book-to-market sorted portfolios, and 5 industry portfolios | | | | | | | | |
| 2S-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.020 | (0.611) | 0.059 | 0.077 | | 0.988 | 0.061 | 0.089 |
| Criterion | 12.290 | (0.139) | | 42.942 | (0.001) | | 133.658 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 12.547 | (0.184) | | 47.153 | (0.001) | | | |
| IT-GMM | | | | | | | | |
| Mean | 0.023 | (0.555) | 0.067 | 0.075 | | 0.946 | 0.067 | 0.108 |
| Criterion | 12.339 | (0.137) | | 41.976 | (0.001) | | 67.123 | (0.000) |
| Criterion $c = 0$ | 12.688 | (0.177) | | 45.890 | (0.001) | | | |



6. Conclusions and directions for further research

- 结论：我们研究了风险价格的估计和过度识别的线性因素定价模型所施加的限制的检验，其中至少有一个因子与研究人员选择的测试资产的超额收益无关。我们的方法直接估计符合模型定价限制的风险价格和相关SDF的线性子空间。我们还提出了简单的测试来检测经济意义上不相关但实证相关的情况，即所有SDF的均值为0，意味着它们与测试资产不相关。
- 建议：我们的论文关注的是线性资产定价模型，探索我们的方法在具有多个风险因素的非线性模型中的应用。



谢谢大家
欢迎大家批评指正

