Rare disaster probability and options pricing

ROBERT J. BARROA , GORDON Y. LIAO B,*

Author

Robert J. Barro

Telephone: 617-4953203

cell-phone: 617-9308188

e-mail: rbarro@harvard.edu

Birth Date: September 28, 1944

Author

Gordon Y. Liao

Ph.D., A.M., Business Economics (Finance), HBS & Harvard Econ,

2013 – 2017

A.B., Applied Mathematics, magna cum laude, Harvard University,

2007 –2011

Email: gliao@post.harvard.edu

Abstract

- 公式推导 — 递归偏好（recursive preferences） — 期权定价公式
  - 灾害风险为主导
  - 灾害规模分布遵循幂律
  - 具有恒定相对风险规避效用函数的代表性代理的股票市场上的远超货币看跌期权
- 数据来源 — 1983年至2018年标准普尔500指数的期权数据
- 目的 — 推断的灾害概率在各国之间高度相关，并预测经济增长率。

Paper proceeds

第2节列出了罕见灾害模型框架。

第3节，给出灾难集合中看跌期权的定价公式。分析首先从灾难的恒定概率p开始，然后介绍时变概率p_t的可能性。

第4节建立实证框架，描述了数据和模型的拟合，并讨论了估计的p_t在预测增长脆弱性中的应用。

第5部分总结。

2. Rare disaster model

使用了一种基于罕见宏观经济灾难的熟悉设置，如Rietz（1988）和Barro（2006、2009）所述。为了方便离散时间建模。实际GDP即Y是由

$$log(Y_{t+1}) = log(Y_t) + g + u_{t+1} + v_{t+1}, \quad (1)$$

g≥ 0是增长的决定性部分，U_{t+1}（扩散项）是一个独立且相同分布的（i.i.d.）正态冲击，平均值为零，方差为σ^2，而V_{t+1}（跳跃项）是灾难性冲击。灾害产生于泊松过程，每个周期的发生概率为p。目前，p被视为常数。

2. Rare disaster model

后来考虑到p的时间变化，它起到了核心作用。当一场灾难发生时，GDP会下降分数b，其中0<b<1

$$\text{probability 1-p:} \quad v_{t+1} = 0,$$

$$\text{probability p:} \quad v_{t+1} = \log(1-b).$$

在基本的Lucas（1978）树模型中，消费C_t等于GDP Y_t ，该模型假设一个封闭的经济体，没有投资，也没有政府采购。如果周期长度较短，则C和Y的预期增长率如下所示

$$g^* = g + (1/2) \cdot \sigma^2 - p \cdot E[b]. \tag{2}$$

2. Rare disaster model

在这个公式和随后的公式中，当周期长度收缩到零时，等式保持不变时，我们使用等号，而不是近似相等。代表代理人有Epstein Zin/Weil utility，如Barro（2009年）：

$$[(1-\gamma)U_t]^{\left(\frac{1-\theta}{1-\gamma}\right)} = C_t^{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \cdot [(1-\gamma)E_t U_{t+1}]^{\left(\frac{1-\theta}{1-\gamma}\right)}, \tag{3}$$

其中γ>0是相对风险规避系数，θ>0是消费替代跨期弹性的倒数，ρ>0是时间偏好率。如Barro（2009）[基于Giovannini和Weil（1989）和Obstfeld（1994）]所示，在i.i.d.冲击和代表性代理的情况下，获得的效用最终满足形式:

2. Rare disaster model

$$U_t = \Phi \cdot C_t^{1-\gamma}/(1-\gamma), \tag{4}$$

常数Φ>0取决于模型的参数。使用等式（3）、（4）最优消耗随时间变化的一阶条件来自扰动参数，如下所示：

$$\left[E_t\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{1-\gamma}\right]^{\left(\frac{\gamma-\theta}{\gamma-1}\right)} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \cdot E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma} \cdot R_{t+1}\right], \tag{5}$$

式中，R_{t+1} 是从时间t到时间t+1的任何可用资产的总回报率。当γ=θ（the familiar setting with time-separable power utility）时，等式（5）左侧的项等于一。

2. Rare disaster model

公式（1）中R和Y的过程意味着，如果周期长度可以忽略不计，则

$$E_t\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{1-\gamma} = 1 + (1-\gamma)g - p + p\cdot E(1-b)^{1-\gamma} + \left(\frac{1}{2}\right)(1-\gamma)^2\sigma^2. \tag{6}$$

该条件可与式（5）一起用于对各种资产定价，包括无风险债券和永续消费流（即卢卡斯树）上的权益主张。

等式（5）、（6）意味着恒定的无风险实际利率由

$$r^f = \rho + \theta g^* - p\cdot\left[E(1-b)^{-\gamma} - \left(\frac{\gamma-\theta}{\gamma-1}\right)E(1-b)^{1-\gamma} - \theta\cdot Eb + \left(\frac{1-\theta}{\gamma-1}\right)\right] - \left(\frac{1}{2}\right)\gamma(1+\theta)\sigma^2. \tag{7}$$

2. Rare disaster model

设P_t 为Lucas树上无杠杆权益主张的周期t开始时的价格。设V_t 为股息价格比；也就是说，P_t与C_t的比值。在当前的i.i.d.冲击模型中，V_t等于常数V，因此P_t的增长率等于C_t的增长率。V的倒数可由等式确定。（5）、（6）成为

$$\frac{1}{V} = \rho - (1-\theta)g^* + p\cdot\left[\left(\frac{1-\theta}{\gamma-1}\right)E(1-b)^{1-\gamma} - (1-\theta)\cdot Eb - \left(\frac{1-\theta}{\gamma-1}\right)\right] + \left(\frac{1}{2}\right)\gamma(1-\theta)\sigma^2. \quad (8)$$

2. Rare disaster model

固定预期权益回报率r^e等于股息收益率1/V和预期权益资本收益率g^*之和，因此，r^e与式（8）相同，只是去掉了该项$-g^*$.（$r^e > g^*$）。恒定股权溢价由等式（7）、（8）给出：

$$r^e - r^f = \gamma\sigma^2 + p\cdot\left[E(1-b)^{-\gamma} - E(1-b)^{1-\gamma} - Eb\right].\quad (9)$$

3. Pricing stock options

3.1 设置定价选项

在卢卡斯树上考虑股票的看跌期权。假设期权的到期日为一个周期，并且只能在该周期结束时行使（欧式期权）。看跌期权的行权价格或执行价为

$$exercise\ \ price = \varepsilon \cdot P_t, \tag{10}$$

在主要分析中，我们假设0<ε≤ 1.ε是指行权价格与股票价格的比率，作为相对行权价格（通常称为货币性）。

3. Pricing stock options

Ω是期权价格与股票价格的比率，作为相对期权价格。看跌期权的总收益率R^{0}_{t+1}由下式给出：

$$R^{o}_{t+1} = \begin{cases} 0 \text{ if } \frac{P_{t+1}}{P_t} \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\Omega} \cdot \left(\varepsilon - \frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \text{ if } \frac{P_{t+1}}{P_t} < \varepsilon \end{cases}. \tag{11}$$

3. Pricing stock options

设P_{t+1} / P_t = (1 + g)·(1 − b) < ε，使用转换后的变量z≡ 1 / (1 − b），对应于正常消耗与灾难消耗的比率。条件0<b≤1转换为z>1，z趋于无穷大，b趋于1。当以z表示时，看跌期权的总回报率从公式（11）修改为

$$R_{t+1}^{o}=\begin{cases} \frac{1}{\Omega}\cdot\left(\varepsilon-\frac{1+g}{z}\right) \text{if 1 disaster occurs and } z>(1+g)/\varepsilon \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}. \tag{12}$$

3. Pricing stock options

3.2. 灾害规模的幂律分布

$$f(z) = Az^{-(1+\alpha)},\ where\ A > 0,\ \alpha > 0,\ and\ z \geq z_0 > 1. \tag{13}$$

f（z）从z_0积分到无穷大的条件意味着A=α*z_0^{α}

$$f(z) = \alpha z_0^{\alpha} \cdot z^{-(1+\alpha)},\ z \geq z_0 > 1. \tag{14}$$

$$1 - F(z) = (\frac{z}{z_0})^{-\alpha}. \tag{15}$$

3. Pricing stock options

$$E(1-b)^{-\gamma} = E(z^{\gamma}) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right) \cdot z_0^{\gamma} \text{ if } \alpha > \gamma. \tag{16}$$

3.3 Options pricing formula

$$1+\hat{\rho} = (1+g)^{-\gamma} \cdot E_t\left(z^{\gamma} R_{t+1}^{o}\right), \tag{17}$$

$$1+\hat{\rho}=1+\rho-(\gamma-\theta)g+p \cdot \left(\frac{\gamma-\theta}{\gamma-1}\right) \cdot \left[E(1-b)^{1-\gamma}-1\right]. \tag{18}$$

3. Pricing stock options

$$\left(1+\hat{\rho}\right)(1+g)^{\gamma} = \frac{p}{\Omega} \cdot \int_{\left(\frac{1+g}{\varepsilon}\right)}^{\infty} \left\{ z^{\gamma} \cdot \left[\varepsilon - \frac{1+g}{z} \right] \cdot \alpha z_0^{\alpha} z^{-(1+\alpha)} \right\} dz. \qquad (19)$$

$$\Omega = \frac{\alpha z_0^{\alpha}}{\left(1+\hat{\rho}+\alpha g\right)} \cdot \frac{p \varepsilon^{1+\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)}. \qquad (20)$$

3. Pricing stock options

3.4. Maturity of the option

灾难发生概率p服从泊松分布，T是欧式看跌期权的到期日，T上的灾难发生数的密度h为：

$$
\begin{aligned}
&h(0) = e^{(-pT)},\\
&h(1) = pTe^{(-pT)},\\
&\dots\\
&h(x) = \frac{(pT)^x e^{-pT}}{x!},\ \ x = 0, 1, \dots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

3. Pricing stock options

当T短到足以忽略多个灾难以及贴现和增长项时，相对期权价格的公式从公式（20）简化为:

$$\Omega = \frac{\alpha z_0^{\alpha} \cdot pT \cdot \varepsilon^{1+\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)}. \tag{22}$$

$$\frac{p^n}{p} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)} \cdot \varepsilon^{-\gamma}. \tag{23}$$

3.6. Time-varying disaster probability

将式（22）改写为:

$$\Omega = \eta_1 \mathrm{pT}\varepsilon^{1+\alpha-\gamma}, \tag{24}$$

其中η1是一个常数

$$\eta_1 = \frac{\alpha z_0^{\alpha}}{(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)} \text{ is a constant.}$$

3.6. Time-varying disaster probability

在极少数情况下，每月固定影响项会突然暂时向上移动，从而导致等式（24）中相应项的跳跃。本文认为这种冲击是由另一个泊松概率q产生的，其大小分布（股票价格的变化）涉及另一个幂律分布。

$$\Omega = \frac{\alpha z_0^{\alpha} \cdot p_t T \cdot \varepsilon^{1+\alpha-\gamma}}{(\alpha-\gamma)(1+\alpha-\gamma)} + \frac{\alpha * \left(z_0^{*}\right)^{\alpha *} \cdot qT \cdot \varepsilon^{1+\alpha *-\gamma}}{(\alpha *-\gamma)(1+\alpha *-\gamma)}. \tag{25}$$

等式（25）右侧的第一项反映了与潜在已实现灾难相关的看跌期权价值，第二项衡量了与p_t变化相关的价值以及这些变化对股价的影响。

3.6. Time-varying disaster probability

$$\Omega = T\varepsilon^{1+\alpha-\gamma} \cdot \left[\eta_1 p_t + \eta_2 q \varepsilon^{(\alpha^* - \alpha)}\right], \quad (26)$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha z_0^{\alpha}}{(\alpha - \gamma)(1 + \alpha - \gamma)}, \quad \eta_2 = \frac{\alpha^* \left(z_0^*\right)^{\alpha^*}}{(\alpha^* - \gamma)(1 + \alpha^* - \gamma)} \quad (27)$$

4 Empirical analysis

实证分析依赖于两类数据：大型金融公司向客户提供的场外交易（OTC）合同的指示性价格，以及伯克利期权数据库和OptionMetrics提供的美国市场数据。

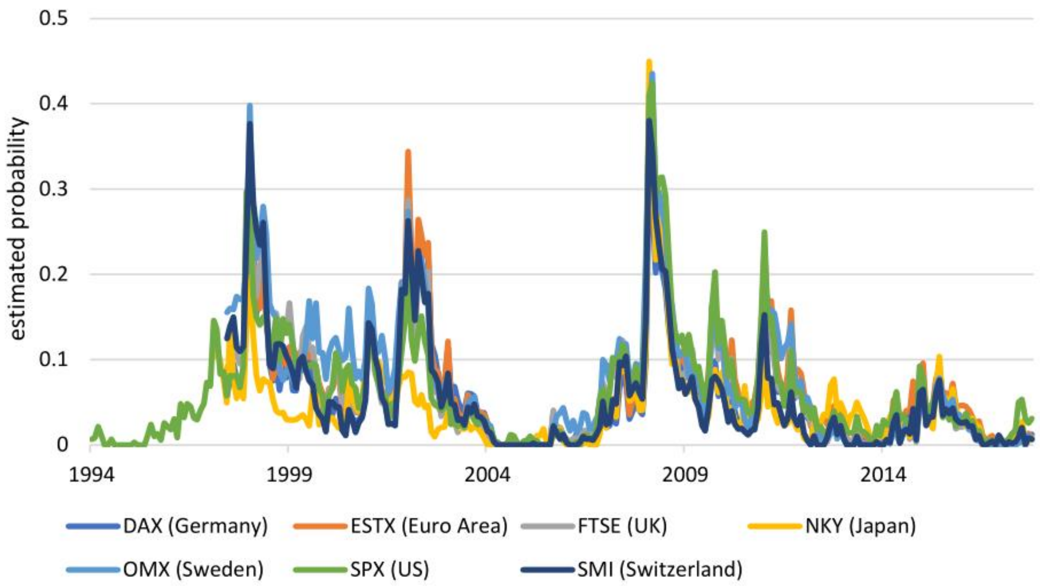
利用七种股票市场指数的场外期权价格：标准普尔500指数（美国）、富时指数（英国）、DAX指数（德国）、ESTX50指数（欧元区）、日经指数（日本）、OMX指数（瑞典）和SMI指数（瑞士）。

Table1 Regressions for put options prices

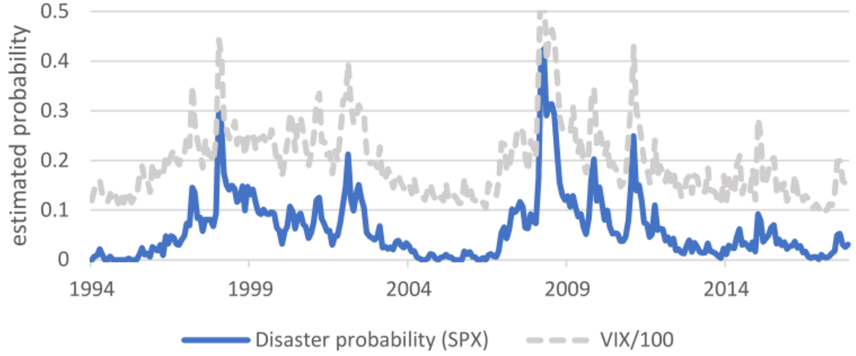
Coefficients	SPX (US)	FTSE (UK)	ESTX (Euro area)	DAX (Germany)	NKY (Japan)	OMX (Sweden)	SMI (Switzerland)	All
β_T	0.992	0.997	0.943	0.946	0.881	0.922	1.004	0.961
	(0.040)	(0.046)	(0.045)	(0.044)	(0.032)	(0.045)	(0.046)	(0.042)
β_ϵ	4.73	4.66	4.45	4.15	4.01	4.64	4.75	4.55
	(0.465)	(0.429)	(0.463)	(0.452)	(0.480)	(0.460)	(0.428)	(0.447)
$\alpha^* - \alpha$	9.42	8.29	7.87	7.68	10.87	8.83	9.71	9.35
	(6.594)	(6.101)	(5.386)	(4.572)	(5.990)	(6.904)	(6.190)	(6.284)
$\eta_2 q$	0.087	0.078	0.095	0.102	0.128	0.103	0.090	0.098
	(0.044)	(0.033)	(0.034)	(0.032)	(0.064)	(0.051)	(0.044)	(0.046)
Implied estimate of α	6.73	6.66	6.45	6.15	6.01	6.64	6.75	6.55
Implied estimate of η_1	0.725	0.737	0.777	0.844	0.882	0.740	0.720	0.756
R-squared	0.973	0.968	0.970	0.968	0.957	0.957	0.965	0.914
σ	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0019	0.0021	0.0014	0.0026
N	5740	4920	4820	4920	4968	4920	4920	35,208
Mean dependent variable	0.0038	0.0040	0.0052	0.0054	0.0048	0.0053	0.0034	0.0045
σ dependent variable	0.0075	0.0080	0.0095	0.0099	0.0092	0.0101	0.0073	0.0089
Sample period start	August 1994	January 1998	June 1998	January 2000	September 1997	January 1998	January 1998	August 1994

Fig. 1. Estimated disaster probabilities

Panel A: Seven Stock Market Indices Individually



Panel B: Disaster probability and the VIX



Panel C: Seven Stock-Market Indices Jointly

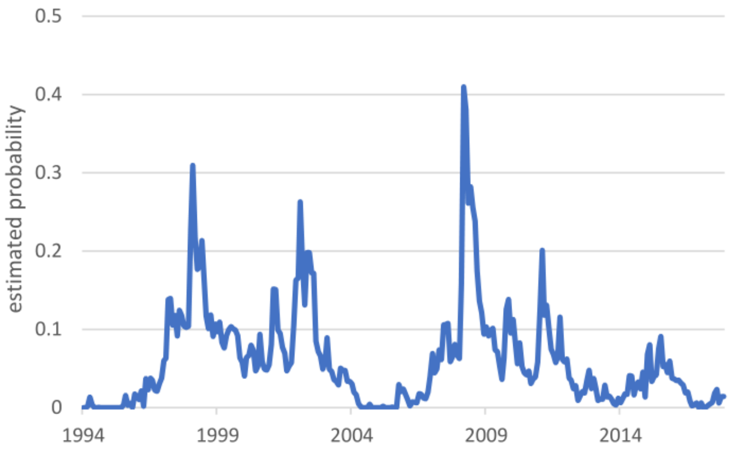


Table2 Statistics for estimated disaster probabilities

Index	Sample	Mean	Standard deviation	Maximum
SPX (US)	August 1994–June 2018	0.062	0.066	0.425
FTSE (UK)	January 1998–June 2018	0.065	0.070	0.398
ESTX (Euro area)	June 1998–June 2018	0.069	0.068	0.371
DAX (Germany)	January 2000–June 2018	0.058	0.064	0.324
NKY (Japan)	January 1998–June 2018	0.045	0.052	0.450
OMX (Sweden)	January 1998–June 2018	0.077	0.078	0.435
SMI (Switzerland)	January 1998–June 2018	0.056	0.070	0.380
All	August 1994–June 2018	0.061	0.065	0.410

Table3 Regression for US put options prices

Panel A: Berkeley and OTC data, 1983–2018.

Coefficients	Estimates (standard errors)
β_T	0.992 (0.036)
β_ϵ	4.91 (0.49)
$\alpha^* - \alpha$	10.61 (8.27)
$\eta_2 q$	0.091 (0.059)
R-squared	0.964
σ	0.0015
N	6370

Panel B: Statistics for estimated disaster probabilities (shown in Fig. 2).

Period	Mean	Standard deviation	Maximum
June 1983–June 2018	0.064	0.097	1.35
June 1983–September 1987	0.004	0.007	0.025
October 1987–September 1988	0.283	0.410	1.35
October 1988–July 1994	0.029	0.047	0.202
August 1994–June 2018	0.070	0.071	0.459

Fig. 2. Estimated US disaster probabilities, 1983 – 2018

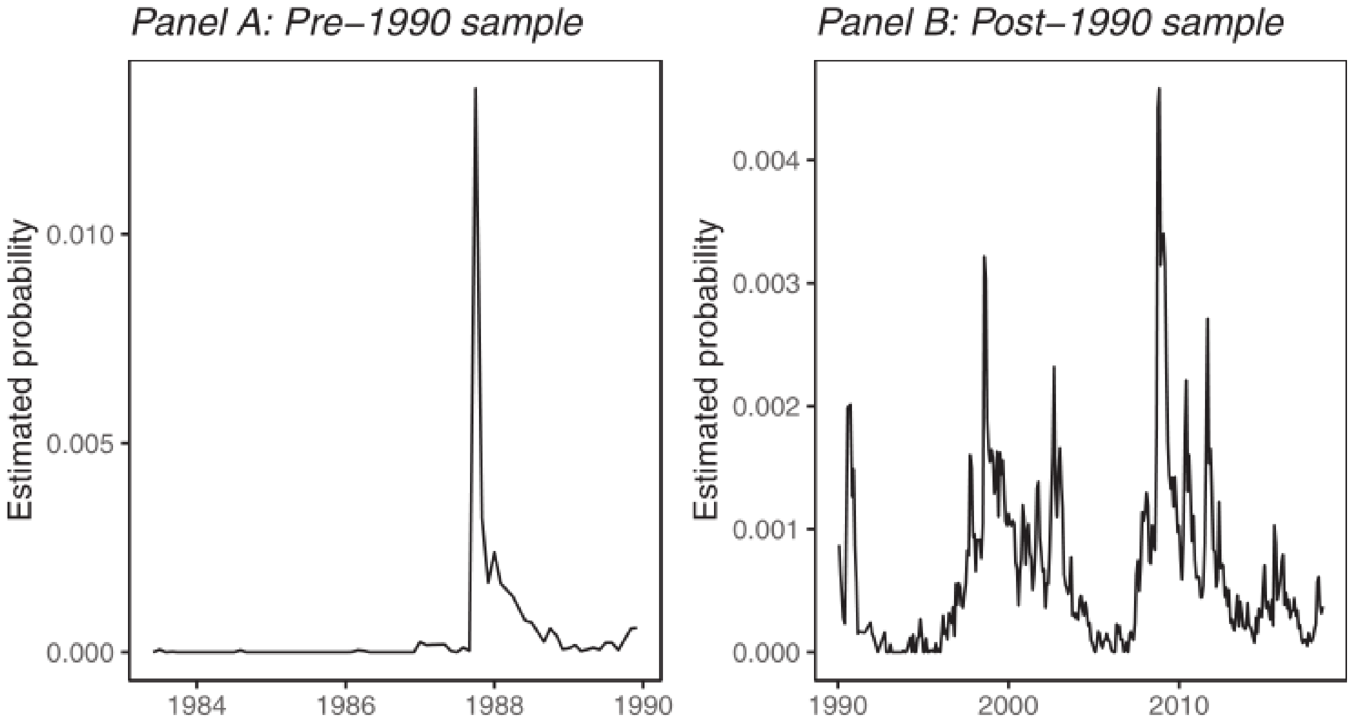


Fig. 3. Forecast of conditional growth for United States

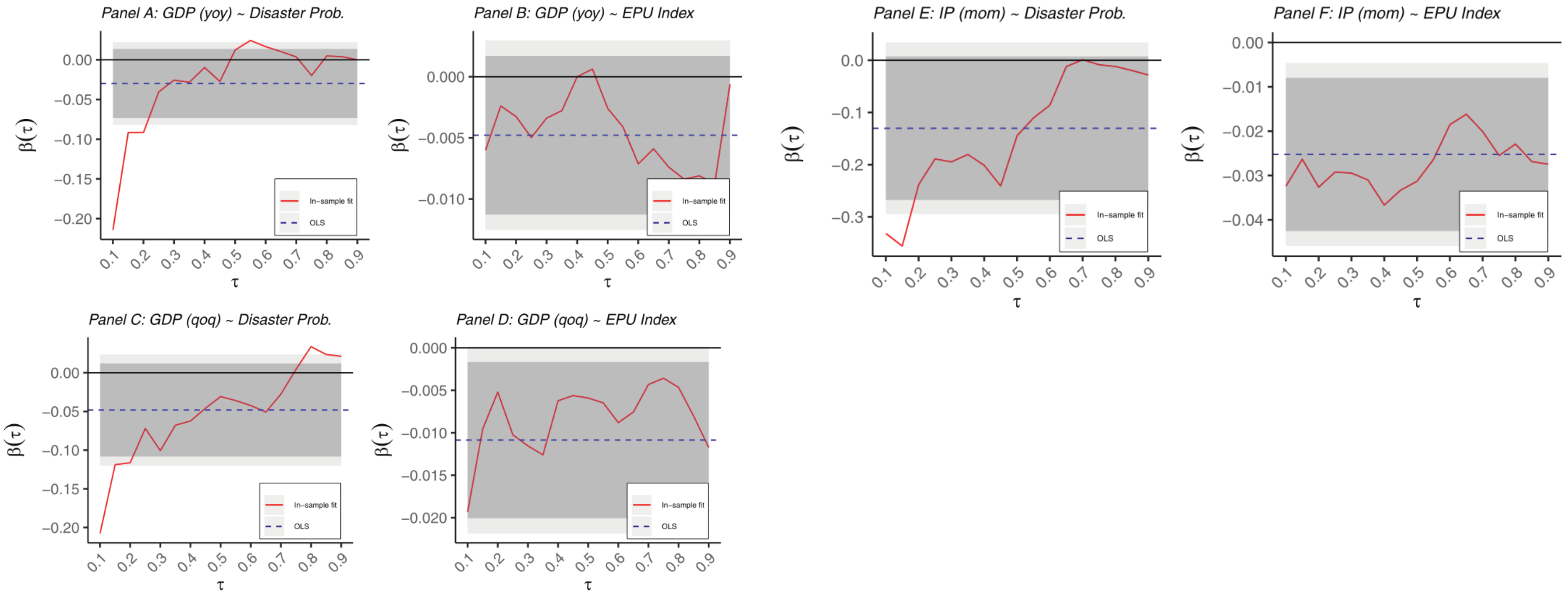


Table4 Regression for US put options prices, OptionMetrics data, 1996 - 2017.

Coefficient	Regular sample	Expanded sample
β_T	1.12 (0.083)	1.14 (0.042)
β_ϵ	5.10 (0.58)	5.44 (0.31)
$\alpha^* - \alpha$	6.10 (6.37)	5.94 (6.68)
$\eta_2 q$	0.068 (0.059)	0.050 (0.028)
R-squared	0.959	0.963
Σ	0.000829	0.000751
N	4879	17,507

$\text{Log}(Y_{t+1})$推导

(1) $$R^e_{t1} = A_{t+1}/P_{t1}.$$

代表消费者利用等弹性效用最大化时间加性效用函数:

(2) $$U_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} [e^{-\rho i} \cdot u(C_{t+i})],$$

(3) $$u(C) = (C^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta).$$

(4) $$u'(C_t) = e^{-\rho} \cdot E_t[u'(C_{t+1}) \cdot R_{t1}],$$

Log(Y_{t+1})推导

(5) $$(A_t)^{-\theta} = e^{-\rho} \cdot (1/P_{t1}) \cdot E_t[(A_{t+1})^{1-\theta}].$$

(6) $$P_{t1} = e^{-\rho} \cdot (A_t)^{\theta} \cdot E_t[(A_{t+1})^{1-\theta}].$$

(7) $$\log(A_{t+1}) = \log(A_t) + \gamma + u_{t+1} + v_{t+1},$$

Thank you for listening

- 21金工　　陈傅俊杰